

Fr. Liegert

Sammlung mathematischer Aufsätze und Bemerkungen.

Herausgegeben

von

Dr. A. L. Crelle,
Königlich Preußischem Geheimen Ober-Baurathe.

Zweiter Band.

Mit 5 Steintafeln.

Berlin, 1822.
In der Maurerschen Buchhandlung.
Poststraße Nr. 29.

Vorrede.

Dieser zweite Band, wie der erste, enthält noch keine Bearbeitung oder Ueberlieferung schon anderwärts gedruckter Aufsätze. Die Aufsätze dieser beiden ersten Bände sind sämmtlich eigenthümliche Arbeiten des Herausgebers. Damit indessen die Vielseitigkeit der Sammlung nicht leide, wird der Verfasser nicht unterlassen, nach dem vor dem ersten Bande angezeigten Plane des Werks, in den folgenden Bänden auch fremde, außer seinen eigenen Ideen, mitzutheilen. Er hat solches anzeigen zu müssen geglaubt, um den Tadel eines Verstoßes gegen seinen eigenen Plan abzulehnen.

Bei einer zufälligen Durchsicht des ersten Bandes hat der Verfasser mehrere kleine Incorrectheiten und manches Einzelne bemerkt, was er anders wünscht. Diese Mängel rühren von der Eile und Zerstreuung her, womit er zu arbeiten gezwungen ist.

Nur der kleinste Theil seiner Zeit gehört der Mathematik. Nur wenige nächtliche Stunden, und ermüdet von seinen Berufs-Arbeiten, kann er ihr widmen, niemals auch nur einen einzigen Tag im Zusammenhange; denn der öffentliche Dienst hat keinen Ruhepunkt. Nichts aber ist bekanntlich mathematischen Arbeiten nachtheiliger, als Zerstreuung und stückweises Arbeiten. Daher kommt es denn, daß seine Arbeiten nicht so gut und geründet ausfallen können, wie er sie wünscht, und wie er sie zu liefern bemüht sein würde, wenn seine Lage der Beschäftigung mit der Mathematik günstiger wäre. Er bittet wegen der vorkommenden Mängel um Entschuldigung, und glaubt unter den obigen Umständen darauf hoffen zu dürfen. Er wird übrigens Alles anwenden, um die Mängel nicht über die Form hinausgehen, und bis in die Gegenstände selbst dringen zu lassen.

Berlin, im März 1822.

A. L. Crelle.

Inhalt

des zweiten Bandes.

9.

Bemerkungen über einige Lehrsätze der Elementar-Geometrie.

201.

Zu den schwierigsten Sätzen der Elementar-Geometrie gehören, nächst den Sätzen von den Parallelen, die ersten Sätze von der Aehnlichkeit und dem Inhalt der Figuren, in so fern die zu vergleichenden Größen incommensurabel sind; ferner der Uebergang vom Geraden zum Krummen, oder die Lehre vom Kreise und den runden Körpern, die Sätze von Körpern, die sich nicht decken u. s. w. Die Schwierigkeit entsteht daraus, daß die Figuren in diesen Fällen nicht unmittelbar congruiren, sondern erst ohne Ende getheilt werden müssen. Der Begriff von der unendlichen Theilbarkeit der Größen ist zwar nicht dunkel, vielmehr ist die Größe selbst, was sich ohne Ende vermehren und vermindern läßt, aber die Anwendung der unendlichen Theilung macht die Beweise leicht schwierig. Bei der Parallelen-Theorie liegt die Schwierigkeit in der Ungleichartigkeit der mit einander zu vergleichenden Größen, nämlich der ganz begränzten Figuren und der Winkel oder Parallelräume, welche nicht ganz begrenzt sind. Das kürzeste Verfahren in Fällen, wo ohne Ende getheilt werden muß, ist freilich, daß man die Resultate der Theilung als Größen behandelt, und sie als solche vergleicht; allein darauf gebaute Beweise sind nicht vor Fehlschlüssen sicher, weil bei denselben etwas vorausgesetzt wird, was nicht Statt findet, nämlich, daß die Resultate unendlicher Verminderung und Vermehrung, das heißt, unendlich Kleines und Großes, Größen sind. Nur angebbare Theile von Größen sind wiederum Größen, und weil Unendlich-Klei-

nes nicht mehr vermindert, Unendlich Großes nicht mehr vermehrt werden kann, so sind beide gar keine Größen mehr die verglichen werden könnten. Die Beweise, welche sich auf Vergleichung der Resultate unendlicher Theilung gründen, sind also dunkel, weil die Gegenstände, auf welche sie sich beziehen, nicht existiren.

Ein anderes Mittel, die Schwierigkeit, sowohl der unendlichen Theilung, als der Ungleichartigkeit der Figuren zu vermeiden, ist, daß man mehrere Sätze, die nicht gleich den andern bewiesen werden können, zu Grundsätzen macht, wie z. B. Euclid den Hauptsatz der Parallelen-Theorie, Archimed den Hauptsatz der Lehre von der Krümmung; allein so lange bei einem Grundsatz noch der Wunsch eines Beweises übrig bleibt, ist es ein Zeichen, daß er nicht zu den einfachsten Principen gehört, die bis an die ersten Quellen der Erkenntniß reichen, weil solche erste Sätze eben an der Eigenschaft, daß sie durch sich selbst klar sind, und ohne weitere Erläuterung vollkommen einleuchten, erkannt werden.

Macht man Sätze zu Grundsätzen, die nicht diese Eigenschaft haben, so spricht man eigentlich nur das Geständniß einer Schwierigkeit aus, ohne die Schwierigkeit zu haben. Beide Behandlungsarten der Sätze mit unendlicher Theilung oder Ungleichartigkeit der Figuren sind also nicht geeignet, das Bedürfniß der Ueberzeugung zu befriedigen. Vielmehr wird mit Recht immer von neuem versucht, solche Sätze strenger zu begründen. Das Bestreben, die Erkenntniß bis zu den ersten Principien zurückzuführen, ist eben so natürlich, als das Bestreben, selbige in der entgegengesetzten Richtung nach Außen zu erweitern; und der Gegenstand ist bei dem einen wenigstens nicht unrichtiger, als bei dem andern; denn allenfalls kann selbst das Begründete ohne die weitere Entwickelung, nicht aber diese ohne Jenes bestehen.

Daß es möglich sey, Manches noch schärfer zu begründen, beweiset die Erfahrung, weil schon von den Alten einige Fälle, wo die unendliche Theilung vorkommt, namentlich durch die Exhaustionsmethode, mehr ins Klare gebracht, auch späterhin Sätze, die sonst für Grundsätze galten, durch eine schickliche

Zusammenstellung von Schlüssen, schon weit mehr erläutert und auf mehr primitive Erkenntniß zurückgebracht worden sind, wie z. B. der archimedische Grundsatz von der Krümmung. Es ist daher kein unnützes Geschäft, die Bemühungen solcher Art fortzusetzen.

Die hier folgenden Bemerkungen sind die Resultate solcher Bestrebungen, bei welchen weniger betretene Wege versucht worden.

I. Ueber die Parallelen-Theorie.

202.

Ueber diesen Gegenstand habe ich meine individuelle Meinung in einer kleinen Schrift: „Ueber Parallelen-Theorieen und das System in der Geometrie," welche im Jahre 1816 in der Maurerschen Buchhandlung erschienen ist, mit ihren Gründen aus einander gesetzt. Meine damaligen Aeußerungen enthielten schon die Resultate eines längeren Nachdenkens über die Parallelen. Ich habe die Untersuchung seitdem fortgesetzt, finde aber an meinen damaligen Bemerkungen, in der Hauptsache Nichts zu ändern. Ich bin noch jetzt überzeugt, daß die Parallelen-Theorie, ohne einen schicklichen Uebergang von unbegrenzten zu begrenzten Räumen nicht begründet werden kann. Schon die Erfahrung bestätigt, daß der Beweis bei den Parallelen, durch begrenzte Räume allein, auf die Weise, wie Euclides alle übrigen Sätze der Geometrie demonstrirt hat, nicht möglich sey, denn die unzähligen Versuche eines solchen Beweises sind allemal wieder gescheitert. Auch läßt sich wohl annehmen, daß, wenn der Beweis möglich wäre, Euclid ihn selbst gefunden haben würde, weil Niemand mit seiner Geometrie so vertraut seyn konnte, als er selbst. Euclid hat aber wahrscheinlich, im Gegentheil, sehr klar die Unmöglichkeit dieses Beweises durch geschlossene Figuren, eingesehen, und also aus Gründen, den Satz von den Parallelen zum Grundsatz gemacht.

In der That läßt sich deutlich zeigen, warum man mit geschlossenen Figuren allein nicht ausreicht. Die Parallelen-

Theorie besteht nämlich aus zwei Sätzen. Dem einen zufolge sind zwei gerade Linien parallel, das heißt, sie schneiden sich nirgends, sobald die inneren Winkel, die sie mit einer dritten, nach einer Seite hin, machen, zusammen gleich zwei rechten sind. Nach dem andern Satze sind die innern Winkel, welche zwei gerade Linien, wenn sie parallel sind, oder sich nirgend schneiden, mit einer dritten machen, zusammen gleich zwei rechten. Der erste Satz kann durch geschlossene Figuren bewiesen werden, denn er beruht auf den Satz, daß die inneren Winkel, welche zwei sich schneidende gerade Linien mit einer dritten machen, kleiner als zwei Rechte sind, welcher Satz bei Euclid der sechzehnte im ersten Buche ist. Wären nämlich die geraden Linien, welche mit einer dritten gleiche Winkel machen, nicht parallel, so schnitten sie sich. Dann aber machten sie nach dem 16ten Satz im 1ten Buch des Euclides mit der dritten ungleiche Winkel; gegen die Voraussetzung. Der zweite Satz hingegen kann nicht durch geschlossene Figuren bewiesen werden, sondern beruht auf dem berühmten eilften Axiom, nach welchem sich zwei Linien nothwendig schneiden, wenn die inneren Winkel, welche sie mit einer dritten machen, kleiner als zwei rechte sind, denn aus diesem Axiom folgt, daß, wenn die inneren Winkel, welche zwei Parallelen mit einer dritten geraden Linie machen, nicht gleich zwei rechten, sondern kleiner wären, daß dann die Linien sich schneiden würden, gegen die Voraussetzung. Die Möglichkeit des Beweises durch geschlossene Figuren im ersten, und die Unmöglichkeit im zweiten Falle läßt sich nun, wie folgt, einsehen. Ist nämlich gegeben, daß die inneren Winkel zweier geraden Linien mit einer dritten, zusammen gleich zwei rechten sind, so entsteht, sobald man leugnet, daß diese beide Linien parallel laufen, allemal eine geschlossene Figur, von welcher bewiesen wird, daß sie die Voraussetzung nicht erfüllt, daß sie also nicht möglich ist, und daß der unbegrenzte Parallelraum wirklich Statt findet. Das Unbegränzte ist hier noch nicht gegeben, sondern seine Existenz wird erst durch gegebenes Begrenzte gefunden. Geschlossen wird vom Unbegrenzten nichts. Ist hingegen gegeben, daß zwei Linien parallel sind, so ist das Unbegrenzte im Vor-

aus gegeben, und es kann daraus für Begrenztes so lange nichts geschlossen werden, als man nicht Sätze vom Unbegrenzten, außer denen vom Begrenzten, hat. Aus diesem Grunde, glaube ich, ist es nicht möglich, auf euclidischem Wege oder durch begrenzte Figuren allein, das euclidische eilfte Axiom zu beweisen. Sätze vom Unbegrenzten, oder wenigstens solche, die den Uebergang vom Unbegrenzten zum Begrenzten machen, scheinen daher unumgänglich nöthig, und zu solchen Sätzen scheinen mir diejenigen von Winkel- und Parallelräumen, wie ich sie in der oben erwähnten kleinen Schrift vorgetragen habe, am geschicktesten. Wenigstens müssen sie so lange für die besten gelten, bis ein besserer Uebergang gefunden ist, weil es an Beweisen ganz fehlt, sobald man sie verwirft. Ich meinestheils halte aber die Gründe, aus welchen man sie etwa verwerfen könnte, nicht für zureichend, sondern nur für scheinbar. Die Sätze haben allerdings eine lange Gewohnheit gegen sich. Allein die Gewohnheit ist nicht entscheidend, weil sich schon öfter gefunden hat, daß, was geraume Zeit und einstimmig für wahr gehalten worden, am Ende dennoch falsch, oder was lange Zeit für unrichtig gehalten worden, dennoch wahr ist. Ich darf übrigens diese Sätze um so dreister, ohne Verdacht der Vorliebe, vertheidigen, da ich die Grund-Idee derselben nicht selbst gefunden, sondern diese Idee nur anders zu entwickeln versucht habe *).

203.

Das Wichtigste, was man gegen die Vorstellungen von Winkel- und Parallelräumen einwenden kann, ist, daß sie auf Widersprüche und Ungereimtheiten zu führen scheinen. Allein stellt man die Einwendungen in das rechte Licht, so scheint mir

*) Es scheint, als wenn zwei, und vielleicht mehrere Geometer fast gleichzeitig auf jene Grund-Idee gekommen wären. Denn außer Bertrand trägt auch der Hofprediger Schulz zu Königsberg in Preußen dieselbe vor. In seinen Anfangsgründen der reinen Mathematik, Königsberg bei Hartung 1790, erzählt derselbe auf der 282sten Seite, daß er diese Parallelen-Theorie im Jahre 1780 gefunden habe. *Bertrand's* developpement des mathematiques ist zu Genf 1778 gedruckt.

die Schwierigkeit zu verschwinden, und zwar, wie ich glaube, so gänzlich, daß vielmehr die Einwendungen selbst, noch Mittel geben, die Beweise der Sätze zu vereinfachen. Dieser Umstand insbesondere soll hier näher auseinander gesetzt werden.

(Fig. 1.) Es scheint z. B. wenn man den Winkel durch den Raum zwischen seinen Schenkeln definirt, ungereimt, daß der Winkelraum ABE dem Winkelraume CDE gleich soll seyn können, da er doch um den Streifen ABDC größer ist: allein diese Schwierigkeit ist offenbar nur scheinbar, denn der Winkel CDE und der Parallelstreifen ABDC sind ungleichartige Größen, welche gar nicht zu einander addirt werden können, so wenig, wie Pfunde zu Thalern. Der Winkelraum ABE ist keinesweges um irgend etwas seiner Art, nämlich um kei- Winkelraum, von CDE verschieden, also ist es auch sehr wohl möglich, daß der Winkel ABE dem Winkel CDE gleich ist. Die scheinbare Schwierigkeit ist bald gehoben, wenn man nur erst die Erklärung des Winkels berichtigt. Der Winkelraum ist nämlich ein, durch zwei sich schneidende gerade Linien vom ganzen, um den Durchschnittspunkt liegenden Ebenen-Raum, abgesonderter Theil dieses Raums. Diese Erklärung ist ausschließend und folglich erschöpfend, denn keine andere, aus geraden Linien gebildete Figur ist ein Theil des ganzen Ebenen-Raums. Daß nämlich begränzte Figuren kein Theil des ganzen Ebenen-Raums sind, ist an sich selbst klar, weil man so viele begrenzte Figuren als man will, an einander setzen kann, ohne jemals den ganzen Ebenen-Raum auszufüllen, Theil einer Größe aber nur das ist, durch dessen Vervielfältigung die Größe hervorgebracht werden kann. Von Parallelstreifen kann die nämliche Behauptung, wenn man will, bewiesen werden. (Figur 2.) Denn setzt man zwei Parallelstreifen ABCD und CDEF an einander, so muß nothwendig wieder ein Parallelstreifen entstehen, weil die Linie AB die EF nicht schneiden kann, ohne von einer Seite der Linie CD nach der andern zu kommen, und folglich nicht ohne CD zu schneiden; gegen die Voraussetzung. Folglich entsteht, so viel Parallelstreifen man auch an einander setzt, immer nur wieder ein Parallelstreifen, und der

ganze Ebenen-Raum wird nie ausgefüllt; folglich ist auch kein Parallelstreifen ein Theil des ganzen Ebenen-Raums, aus demselben Grunde, wie bei der begrenzten Figur. Der Beweis, daß keine andere Figur als der Winkel, ein Theil des ganzen Ebenen Raums seyn kann, ist aber für die Ausschließlichkeit der obigen Erklärung des Winkels nicht einmal nöthig. Sobald man nämlich voraussetzt oder postulirt, daß die Winkel ABE und CDE (Fig. 1.) an zwei verschiedenen Orten im Raum sollen gleich seyn **können**, so **folgt** daraus, daß z. B. der Parallelstreifen ABCD kein Theil des ganzen Ebenen-Raums seyn könne, wie es der Winkel ist, und daß also der Parallelstreifen ABCD und die Winkel ABE und CDE **ungleichartige** Größen sind, weil sonst nimmer die Winkel ABE und CDE gleich seyn **könnten**. Wäre übrigens der Einwand, daß die Gleichheit der Winkel wegen des, dem einen fehlenden Parallelstreifens unbegreiflich sey, reell, so würde er auch eben so wenig durch die euclidische Erklärung des Winkels gehoben; denn, wird auch wirklich bei der euclidischen Winkel Erklärung, des Raums zwischen den Schenkeln eines Winkels nicht gedacht, sondern der Winkel blos für die Neigung zweier geraden Linien erklärt, so ist es doch einmal gewiß, daß zwischen den beiden Schenkeln des Winkels irgend ein Theil des ganzen Raumes der Ebene liegt. Untersucht man nun die Natur dieser von dem ganzen Ebenen-Raum abgesonderten Räume nicht näher, so wird eben aus der scheinbaren Schwierigkeit eine wirkliche, weil es ohne die Ungleichartigkeit des Parallel- und Winkelraumss zu beachten wirklich unbegreiflich ist, wie der um den Parallelraum ABDC von dem Winkel CDE verschiedene Winkel ABE jenem gleich seyn kann.

Der wesentliche Vortheil vom Gebrauch des Raum-Begriffs bei der Erklärung des Winkels besteht darin, daß der Winkel dadurch ein absolutes und unterscheidendes **Maaß** erhält, welches ohne den Begriff des Raums fehlt, gleichwohl aber, so lange die Figuren nicht geschlossen sind, und also zum nothwendigen Maaß der Winkel noch nicht die Seiten oder Diagonalen der Figur dienen können, zur Begründung der Parallelen-Theorie unentbehrlich ist. Es scheint mir gewiß, daß in

dem Mangel eines absoluten Maaßes der Winkel, die Unmöglichkeit der Begründung der Parallelen-Theorie durch euclidische Sätze liegt; nur muß das Maaß richtig verstanden und angewendet werden. Man darf die hier vorkommende Ungleichartigkeit der Räume, welche bei geschlossenen Figuren nicht angetroffen wird, keinesweges übersehen. Das Maaß des Winkels ist der Raum zwischen seinen Schenkeln, und dieser ist ein Theil des unbegrenzten Ebenen-Raums. Alles folglich, was nicht ebenfalls ein Theil des unbegrenzten Ebenen-Raums ist, ändert an dem Maaße des Winkels nichts. Also ist die Summe mehrerer Winkel, sie mögen einen gemeinschaftlichen Schenkel haben oder nicht, allemal dem ganzen Raume, dessen Winkelgröße, in vier gleiche Theile getheilt, den rechten Winkel giebt, also vier rechten Winkeln gleich, der Raum, den die Summe der Winkel bedeckt, mag um so viel Parallelräume oder begrenzte Figuren, als man will, vom ganzen Raum verschieden zu seyn scheinen, wenn nur der Unterschied keinen Winkelraum beträgt, denn Parallelräume und begrenzte Räume sind, wie schon erinnert, gar nicht Theile des ganzen ebenen Raumes, und können also auch, als ungleichartige Größen, gar nicht mit Winkeln verglichen oder zu ihnen hinzugethan oder davon hinweggenommen werden, ungefähr, vergleichsweise, eben so wenig, wie Punkte und Linien, zu Flächen und Körpern addirt, oder davon hinweggenommen werden können. So wenig wie die Größe einer Figur sich ändert, es mögen so viele Linien hindurchgezogen, oder so viele Punkte hineingesetzt werden, als man will; so wenig ändert sich der Winkelraum durch die Anwesenheit von Parallelräumen oder geschlossenen Figuren.

Hierbei ist ausdrücklich zu bemerken, daß der Vergleich nicht etwa so zu verstehen ist, als wären Parallelräume und begrenzte Figuren unendlich klein gegen den Winkelraum, und könnten also ihrer Kleinheit wegen weggelassen werden. Unendlich-Kleines ist das Resultat der Theilung ohne Ende, und also an sich selbst gleichartig mit der Größe, aus welcher

es entstanden ist. Parallelräume hingegen und begrenzte Figuren können aus dem Winkelraume eben so wenig wie Linien und Punkte aus Flächen oder Körpern durch Theilung entstehen, und haben also auch auf den Winkelraum gar keine Beziehung. Sie und Winkelräume sind völlig ungleichartige Größen, ungefähr wie Pfund und Thaler.

Die Ungleichartigkeit zeigt sich vielleicht an folgendem Beispiele noch deutlicher. Die vier Winkel EAG, EAI, GAL und IAL nämlich, die den ganzen Ebenen-Raum genau ausfüllen, sollen einander gleich, also rechte seyn. Nun mache man den Winkel FBI = EAI und den Winkel HCL = GAL, so ist HC mit GA und FB, oder verlängert, FBM mit EL parallel. Man mache ferner den Winkel KDM dem Winkel FBI gleich, so ist auch DK mit BI parallel, und die vier Winkel EAG, FBI, KDM und HCL sind ebenfalls vier rechte Winkel, und folglich den 4 Winkeln EAG, EAI, GAL und IAL vollkommen gleich. Gleichwohl lassen sie vom ganzen Ebenen-Raum die Parallel-Räume EFLM, GAHC und BIDK übrig. Daraus folgt, daß diese Parallelräume und die Winkel nothwendig ungleichartige Größen seyn müssen, weil sonst die Gleichheit, die doch wirklich Statt findet, ganz unmöglich wäre.

(Fig 4.) Die Ungleichartigkeit begrenzter Räume und Winkelräume fällt nicht minder in die Augen. Man schneide z. B. von dem Winkelraum BAC einen beliebigen begrenzten Raum ADE ab, so wird dadurch offenbar die Neigung der Linie BA und CA nicht im geringsten verändert, folglich hat der abgeschnittene begrenzte Raum auf die Größe des Winkelraums, der das Maaß der Neigung der Linien BA und CA ist, nicht den geringsten Einfluß. Winkel sind also, um es zu wiederholen, nur um Winkel von einander verschieden, also Winkelräume nur um Winkelräume, und um keine anderen Räume. Winkelräume bleiben dieselben, es mögen so viel Parallel- oder begrenzte Räume zu ihnen hinzukommen, oder an ihnen fehlen, als man will, und Winkel, deren Räume nur um Parallel- und begrenzte Räume, aber um keinen Winkelraum verschieden sind, sind einander vollkommen gleich.

204.

Hält man sich nun streng an diese, den obigen Einwand und alle Schwierigkeit hebende Erklärung des Winkelraums, so ist die Begründung der Parallelen-Theorie ungemein leicht. (Fig. 5) Verlängert man nämlich die drei Seiten eines beliebigen Dreiecks ABC, so sind die Scheitelwinkel DAE und GAI, FBG und EBH, HCI und DGF gleich. Alle sechs Winkel aber füllen den ganzen Ebenen-Raum aus, ohne daß sie irgend einen Winkelraum davon übrig ließen, also ist ihre Summe gleich vier rechten Winkeln, und folglich die Summe der drei Winkel CAB, ABC und BCA des Dreiecks ABC gleich zwei rechten Winkeln. Zwar bedecken die sechs Winkel, außer dem ganzen Ebenen-Raum, noch zweimal den Raum des Dreiecks; allein durch diesen begrenzten Raum wird die Fläche um keinen Winkelraum vergrößert, folglich ist die Summe der drei Dreiecks-Winkel von zwei rechten durchaus um keinen Winkel verschieden, worauf es allein ankommt, und wonach allein gefragt wird, denn man frägt nicht: wie groß ist das Dreieck selbst? oder wie groß sind Parallelräume, die etwa in seinen Winkeln liegen? sondern wie groß sind die Winkel des Dreiecks? und diese werden nur durch Winkelräume allein gemessen.

Auch auf folgende Art kann man den Satz von den drei Winkeln des Dreiecks beweisen.

(Fig. 6.) Man mache nämlich, nachdem die Seiten des Dreiecks verlängert worden, die Winkel EAK = EBH, LBF = DCF und MCF = GAI, so sind AK mit CH, LB mit AD und CM mit GB parallel. Also sind KACH, DABL und GBCM Parallelräume. Die Summe der drei Winkel DAK, LBG, HCM läßt also vom ganzen Ebenen-Raum nur die so eben genannten Parallelräume, aber keinen Winkelraum übrig, also beträgt sie so viel als vier rechte. Folglich beträgt die Summe der drei Dreieckswinkel, deren jeder in den drei Winkeln DAK, LBG und HCM zweimal vorkommt, zwei rechte.

Der Satz von den Dreieckswinkeln enthält nun die Parallelen-Theorie einschließlich. Denn wenn MCI = GAI gemacht worden, so ist MC mit AG parallel, weil MCI und

GAI nicht gleich seyn würden, wenn sich MC und AG schnitten, nach Euclides 1stes Buch 16ter Satz. Nun ist MCI + BCM + BCA gleich zwei rechten Winkeln. Bewiesenermaaßen aber ist auch GAI + BCA + ABC gleich zwei rechten Winkeln; also ist MCI + BCM + BCA = GAI + ABC + BCA, folglich, weil MCI = GAI gemacht worden, BCM = ABC, oder weil BCM = NCH ist, NCH = ABC. Die Linie NCM war aber mit ABG parallel, also sind die Winkel NCH und ABH, welche zwei Parallelen NC und EB mit der geraden Linie BH machen, einander gleich, welches unmittelbar die Behauptung des eilften euclidischen Axioms, daß zwei gerade Linien sich schneiden, wenn die inneren Winkel kleiner als zwei rechte sind, beweiset; denn schnitten sich solche Linien nicht, so wären die Winkel, wie so eben gefunden, nicht ungleich, sondern gleich; gegen die Voraussetzung.

205.

So läßt sich die Parallelen-Theorie leicht, und wie es scheint, mit der größten Strenge begründen. Ich meinestheils bin nicht im Stande, einen gültigen Einwand gegen den Beweis, oder eine Ungereimtheit darin zu entdecken. Alles kommt darauf an, daß die Möglichkeit zweier gleichen Winkel ABE und CDE (Fig. 1.) mit einem gemeinschaftlichen Schenkel und verschiedenen Scheitelpunkten zugegeben wird; denn daraus folgt unmittelbar, daß der Parallelraum ABCD und der Winkel CDE ungleichartige Größen seyn müssen, weil der erste an dem zweiten nichts ändert, und dann weiter, wie oben, das Uebrige.

Die Möglichkeit zweier sich gleichen Winkel aber wird Niemand leugnen. Uebrigens hat man, wenn man die Natur des Parallelraums und Winkels gerade zu untersucht, statt sie mit Stillschweigen zu übergehen, nicht allein den Vortheil, daß man einen einfachen Beweis der Parallelen-Theorie erhält, sondern man hebt auch, wie oben bemerkt, die wirkliche Unbegreiflichkeit der Verhältnisse der Winkel zu Parallelräumen, welche dann wirklich Statt findet, wenn man den Winkel bloß

als Neigung zweier Linien erklärt, was außerdem an sich selbst nicht deutlich ist.

Was bei den gegenwärtigen Untersuchungen über die Parallelen, auch in meiner oben erwähnten kleinen Schrift noch nicht vorkommt, ist die Bemerkung, daß begrenzte Räume, Parallel-Räume und Winkel-Räume ungleichartige Größen sind, die gar nicht mit einander verglichen werden können, und die Folgerung dieses Umstandes aus der scheinbaren Ungleichheit gleicher Winkel.

Man gewinnt allerdings wenig oder nichts, wenn man wie Bertrand und Schulz das Unendlich-Kleine zu Hülfe nimmt, denn von dem Unendlich-Großen und Kleinen weiß man, weil solche gar keine Größen mehr sind, so wenig, daß Alles, was sich darüber sagen läßt, auf nicht viel mehr als Worte hinausläuft. Man schadet vielmehr der geometrischen Evidenz, denn man setzt an die Stelle eines, wenn auch unbewiesenen, so doch offenen und natürlichen Grundsatzes, das Unbegreifliche, und macht mißliche Schlüsse von Etwas, was nicht ist, auf wirkliche Größen.

Die Lehre von der Ungleichartigkeit der Größen ist in der That sehr wichtig, und kann noch in vielen anderen Fällen nützlich seyn. Auch ist sie wegen ihrer Einfachheit ganz für Elemente geeignet, denn nichts ist einfacher, als die Erklärung ungleichartiger Größen. Sie sind solche, die nicht durch Vermehrung oder Verminderung aus einander entstehen können, wie Punkte, Linien, Flächen, Körper. Daraus folgt dann weiter, daß Größen, die nicht gleichartig sind, gar nicht zu einander addirt oder von einander subtrahirt werden können, und folglich auf einander, in geometrischer Rücksicht, gar keinen Einfluß haben; desgleichen, daß jede Größe nur durch gleichartige Größen gemessen und nur durch solche geschätzt werden kann, und daß es bei dem Messen der Größen auf ungleichartige Größen, die etwa mitzuwirken scheinen, gar nicht ankommt, weil von ihnen gar nicht die Rede ist. Die Lehre von der Ungleichartigkeit der Figuren sollte also, wie es scheint, gleich im Anfange der Geometrie vorgetragen werden.

II. Von der Ausdehnung geometrischer Sätze auf den Fall der Incommensurabilität.

206.

Wenn z. B. bewiesen werden soll, daß sich Rechtecke von gleicher Höhe wie die zugehörigen Grundlinien, oder Parallelepipeden von gleichen Grundflächen wie die zugehörigen Höhen verhalten, das heißt, daß Rechtecke von gleichen Höhen und die zugehörigen Grundlinien, oder Parallelepipeden und die zugehörigen Grundflächen, Gleichvielfache sind, worin die beiden Hauptsätze der Lehre vom Inhalt der Figuren in der Ebene und im Raume bestehen; oder wenn bewiesen werden soll, daß die von Parallelen abgeschnittenen Theile der Schenkel eines Winkels Gleichvielfache sind, welches der Hauptsatz der Lehre von der Aehnlichkeit ist; oder daß Kreisbogen und die zugehörigen Winkel am Mittelpunkt Gleichvielfache sind u. s. w., so theilt man gewöhnlich die eine der zu vergleichenden Größen in so viel Theile, daß der Theil grade in die andere Größe aufgeht. Dadurch entstehen gleiche Figuren, und die Sätze folgen unmittelbar. Allein es kann kommen, daß kein Theil in beiden Größen zugleich aufgeht, oder daß die Größen kein gemeinschaftliches Maaß haben, oder vielmehr, daß kein gemeinschaftliches Maaß angebbar ist, oder daß die Größen incommensurabel sind. Alsdann hört der Beweis auf und es muß erst besonders bewiesen werden, daß, was für den Fall der Commensurabilität gilt, auch auf den Fall der Incommensurabilität passet. Bekanntlich geschieht dies auf indirectem Wege, auf die Weise, daß man zeigt, es sey unmöglich, daß die vierte zu vergleichende Größe, größer oder kleiner sey, als dasjenige Vielfache von der dritten, welches die zweite von der ersten ist. Allein es ist beschwerlich, denselben Beweis für jeden der nicht wenigen Fälle, in welchen er vorkommt, zu wiederholen und den jedesmaligen eigenthümlichen Umständen anzupassen. Deshalb scheint es gut, wenn man allgemein beweiset, daß was unter der Bedingung der Zusammengehörigkeit der Größen, im Fall der Com-

mensurabilität gezeigt worden, auch für den Fall der Incommensurabilität gilt. Dieser allgemeine Beweis würde mit seinen Vordersätzen folgender seyn.

207.

I. Erste Erklärung. Größen sind gleichartig, wenn sie aus einander durch Vermehrung oder Verminderung entstehen können. Sie sind ungleichartig, wenn dieses nicht möglich ist. Z. B. zwei Linien, zwei Flächen, zwei Körper u. s. w. sind gleichartige Größen. Eine Linie und eine Fläche, eine Fläche und ein Körper u. s. w. sind ungleichartige Größen.

II. Zweite Erklärung.

Der vollständige Begriff einer Größe wird gegeben durch eine als Einheit willkührlich angenommene Größe derselben Art, und durch eine Zahl, welche ausdrückt, wieviel solcher Einheiten die zu bestimmende Größe enthält. Die Zahl kann angebbar oder nicht angebbar seyn. Im ersten Falle heißt sie rational, im andern irrational. Die zu bestimmende Größe aber heißt im ersten Fall, commensurabel mit der Einheit, im anderen, incommensurabel. Rationale Zahlen sind entweder ganze Zahlen oder Brüche. Brüche können auch als ganze bestimmte Zahlen betrachtet werden, nämlich als Zahlen von anderen bestimmten Einheiten, die so oft in der gewählten Einheit enthalten sind, als der Nenner des Bruchs absolute Einheiten enthält. Da die Existenz einer Größe nicht von ihrem Ausdruck abhängt, so muß nothwendig immer eine Zahl existiren, welche ein beliebiges Vielfache der Einheit ausdrückt. Dieser Zahl geht also, wenn sie auch nicht angebbar ist, deshalb nichts von ihren übrigen Eigenschaften ab. Folglich kann jede Größe ganz allgemein als ein Vielfaches einer beliebigen anderen Größe ihrer Art betrachtet werden. Die Zahl des Vielfachen ist entweder eine ganze Zahl oder ein Bruch, oder irrational, das heißt, angebbar oder nicht angebbar.

III. Dritte Erklärung. Ungleichartige Größen sollen zusammengehörig oder zu einander gehörig heißen,

wenn sie die Eigenschaft haben, daß immer beide zugleich zu- oder abnehmen, niemals die eine zunimmt, wenn die andere abnimmt, und umgekehrt. So verhält es sich z. B. mit den Flächen von Rechtecken und den Grundlinien dieser Rechtecke, mit den Winkeln am Mittelpunkt eines Kreises und den zwischen ihren Schenkeln liegenden Bogen. Diese Größen also sind zusammengehörige Größen.

IV. Lehrsatz. Wenn von zwei ungleichartigen, aber zusammengehörigen Größen a und A bewiesen werden kann, daß, sobald die eine a in ihr m faches ma übergeht, aus der andern A das nämliche m fache mA entsteht, und zwar für jede mögliche, jedoch angebbare Zahl m, so findet das nämliche auch für jede nicht angebbare Zahl, also ganz allgemein, für jede mögliche Zahl Statt.

Beweis. Ginge, im Fall m irrational ist, nicht A in mA über, wenn a in ma übergeht, so ginge A in eine größere oder kleinere Größe als mA über, z. B. in die größere (m + e) A, wo e irgend eine angebbare oder nichtangebbare Zahl bedeutet. Es lassen sich aber Zahlen so nahe bei einander als man will annehmen, also zwei Zahlen p und q, deren Unterschied kleiner ist als e, was auch e seyn mag. Nun können zwischen zwei gegebenen Zahlen wie p und q nicht zwei andere zugleich liegen, deren Unterschied größer ist als der Untersch von p und q, also lassen sich zwei Zahlen p und q angeben, zwischen welchen nicht die beiden angebbaren oder nicht angebbaren Zahlen m und m + e zugleich liegen können. Ist also p kleiner als m, und q größer als m, so liegt q nothwendig zwischen m und m + e, also ist qA größer als mA und kleiner als (m + e) A, desgleichen ist qa größer als ma.

Nun nehme man an, a gehe in qa über, so wird nothwendig, weil q eine angebbare Zahl ist, A in qA übergehen, denn diese Eigenschaft ist, der Voraussetzung nach, für alle mögliche angebbaren Zahlen bewiesen worden. Sollte nun ferner qa in ma übergehen, so müßte qA in (m + e) A übergehen, weil angenommenermaaßen (m + e) A aus A wird, während ma aus a wurde. ma aber ist kleiner als qa und

hingegen $(m + e) A$ größer als qA, also würde qa bis zu ma abnehmen, während qA bis zu $(m + e) A$ zunimmt. Dieses ist der Eigenschaft zusammengehöriger Größen, dergleichen a und A seyn sollen, entgegen. Also ist es nicht möglich, daß A in etwas größeres als mA übergeht, während a in ma übergeht. Auf dieselbe Art wird bewiesen, daß A in keine kleinere Größe als mA übergehen kann, während a in ma übergeht. Also muß nothwendig A in mA übergehen, während a in ma übergeht, auch im Fall m irrational ist. Folglich gilt, was für zusammengehörige commensurable Größen bewiesen worden, auch ohne Ausnahme für zusammengehörige incommensurable Größen.

208.

Nachdem auf diese Weise der Satz allgemein bewiesen worden, erspart man die Wiederholung des Beweises in jedem einzelnen Falle, wo er vorkömmt. Ich habe den obigen allgemeinen Beweis bei meiner Uebersetzung der Geometrie von Legendre in eine Anmerkung aufgenommen, hier aber noch etwas deutlicher und bestimmter auszudrücken gesucht.

Es ist zu erinnern, daß hier nicht etwa das Unendlich-Kleine als Größe behandelt wird. Es wird bewiesen, daß man die oben mit e bezeichnete Abweichung von der Größe m gar nicht so klein annehmen könne als nöthig ist, damit sie möglicherweise existire. Daraus folgt, daß gar keine solche Abweichung Statt findet. Will man das e, welches beweisenermaaßen kleiner seyn muß, als jede mögliche Größe, unendlich-klein nennen, so bezeichnet man immer nur das Nicht-Existirende, und die Ausdrücke: „zwei Größen sind gleich" und „zwei Größen sind um Unendlichkleines verschieden", haben ganz einerlei Sinn, denn der zweite Ausdruck heißt richtiger: die Größen sind um keine existirende Größe verschieden, oder kürzer, sind nicht verschieden.

Von einer Vergleichung eines Unendlichkleinen mit dem andern, oder einer nicht existirenden Größe mit der andern ist hier nicht die Rede.

III. Von den vorzüglichsten den Kreis und die runden Körper betreffenden Sätzen.

A. Vom Kreise.

209.

Unter „Sätze vom Kreise" verstehe ich solche, die sich wirklich auf die, die Kreisfläche begrenzende krumme Linie beziehen. Zuweilen rechnet man auch Sätze dazu, bei welchen der Kreis nur eine willkührliche Hülfsfigur ist, aber solche Sätze handeln nicht eigentlich vom Kreise. So z. B. ist der Kreis bei allen Sätzen von der Centricität der Figuren, daß heißt bei den Sätzen von den Mittelpunkten gradliniger Figuren, oder bei der Lehre von den Punkten, die von den Ecken oder Seiten einer Figur gleich weit entfernt sind, nur eine willkührliche Hülfsfigur, weil es dabei nicht sowohl auf die Gleichheit der Entfernung aller Punkte einer stetigen Linie, wie der Kreisumfang ist, sondern nur auf die Entfernung einer gewissen Zahl einzelner Punkte von einem und demselben Punkte ankommt. Auch der Satz, daß der Winkel am Mittelpunkt doppelt so groß ist, als der Winkel am Umfange, bedarf des Kreises nicht, denn dieser Satz ist kein anderer, als, daß in jedem Dreieck der, einer beliebigen Seite, gegenüberliegende Winkel, halb so groß ist als der, der nämlichen Seite gegenüberliegende Winkel am Mittelpunkt der Ecken des Dreiecks. Alle diese Sätze handeln nicht vom Kreise selbst, sondern von gradlinigen Figuren, für welche Kreis-Umfänge beschrieben werden können, aber nicht nothwendigerweise beschrieben werden müssen. Sätze vom Kreise sind diejenigen, von der Berührung, vom Umfange und dem Inhalte des Kreises, von Vergleichung der Winkel am Mittelpunkt durch die zugehörigen Kreisbogen u. s. w. Das hier Folgende betrifft die Sätze vom Umfange und Inhalt des Kreises, nämlich daß sich die Umfänge zweier Kreise wie die Durchmesser verhalten, und daß der Inhalt des Kreises dem Product des halben Umfangs in den Halbmesser, oder dem Inhalt eines rechtwinklichen Dreiecks gleich ist, dessen Catheten der Umfang und der Halbmesser sind.

210.

Am kürzesten kommt man allerdings mit dem Umfang und Inhalt eines Kreises weg, wenn man den Kreis als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten betrachtet, das heißt, wenn man die Sätze vom regelmäßigen Vieleck, erstlich für Vielecke von unendlich vielen Seiten gelten läßt, und dann den Kreis für ein Vieleck von unendlich vielen Seiten erklärt. Allein klar bewiesen werden auf diese Art die Sätze vom Kreise nicht, weil der Kreis keine geradlinige sondern eine krummlinige Figur ist, und das Verfahren, die Sätze vom regelmäßigen Vieleck auf Vielecke von unendlich vielen Seiten oder auf Figuren auszudehnen die nicht existiren, und dann wiederum den Kreis für eine solche, nicht existirende Figur zu erklären, nicht allein willkührlich ist, und folglich die darauf beruhenden Beweise eigentlich keine Beweise sind, sondern auch das Verfahren auf dunklen Wegen durch das Imaginaire oder nicht Existirende hindurch geht, wo nur Täuschung, nicht Ueberzeugung anzutreffen zu seyn pflegt.

Bei der Parallelen-Theorie entsteht eine wirkliche Schwierigkeit dann, wenn man die Ungleichartigkeit der dabei vorkommenden Größen außer Acht läßt: hier ist ein Fall wo sie zu entstehen scheint, wenn man die Resultate unendlicher Theilung als Größen behandelt. Man geräth dadurch leicht, wenigstens auf Ungenauigkeit. Meint man nämlich wirklich unendlich kleine Größen z. B. Vielecke mit unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten, so läßt sich von denselben gar nichts behaupten, weil Vielecke von unendlich vielen Seiten erst nach unendlicher Vervielfältigung der Seitenzahl und also gar nicht gefunden werden können. Meint man aber wirklich existirende Vielecke, so können solche nicht Vielecke von unendlich vielen Seiten genannt werden. Dann sind es nur Vielecke von sehr vielen und sehr kleinen Seiten. Aber dann fehlt der Beweis, daß der Unterschied des Resultats von dem für den Kreis gesuchten Resultat auch nur sehr klein ist. Z. B., wenn man den Umfang eines regelmäßigen Vielecks mit dem Umfang des Kreises verwechselt, um den Inhalt des letztern zu finden, so verwechselt man die Sehnen oder Tan-

genten mit den zugehörigen Bogen. Angenommen auch, daß der Unterschied zwischen der Länge eines Bogens und der Länge seiner Sehne und Tangente nur sehr klein ist, so kommt doch dieser Unterschied, wenn das Vieleck sehr viele Seiten hat, sehr oft vor, und es fehlt der Beweis, daß nicht sehr viele sehr kleine Unterschiede einen bedeutenden Unterschied ausmachen. Man erhält also, wenn man ohne Weiteres die Sätze von regelmäßigen Vielecken auf den Kreis ausdehnt, nur Hypothesen, nicht Beweise.

211.

Genauer schon ist es, wenn gezeigt wird, daß der Kreis immer zwischen in- und umschriebenen Vielecken liegt, deren Unterschiede, sowohl dem Inhalte als Umfange nach, kleiner seyn können, als jede gegebene Größe, woraus sich folgern läßt, daß die Sätze von den Vielecken auf den Kreis ausgedehnt werden dürfen.

Allein zu solchen Beweisen ist der Satz nöthig, daß die grade Linie nicht allein der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten, sondern ein Kreisbogen durch die nämlichen Punkte, länger ist als die grade Linie. Diesen Satz macht man, mit Archimedes, zum Grundsatz. Da aber derselbe zu wenig einfach ist, um durch sich selbst einzuleuchten, so gewinnt man durch den übrigen, noch so sehr in die Natur der Sache eingehenden Beweis, wenig. Schon daß die grade Linie der kürzeste Weg von einem Punkt zum andern sey, ist durch sich selbst kaum klarer, als das eilfte euclidische Axiom von den Parallelen, ja der Satz ist in sich selbst nicht einmal deutlich ausgesprochen, weil der Begriff von „kürzer" und „länger" erst aus dem Begriff der graden Linie, die das Maaß für die Länge einer Linie ist, entsteht. Wird nun gar der Grundsatz noch weiter ausgedehnt und behauptet, daß auch keine andere Linie zwischen den nämlichen Endpunkten eben so lang seyn kann, als die grade, sondern jede andere nothwendig länger sey, so leuchtet dies noch weniger ein.

212.

Daher ist von jeher der Beweis des Archimedischen Grundsatzes gewünscht und ungefähr für eben so nothwendig gehalten

worden, wie der Beweis des Euclidischen Axioms für die Parallelen-Theorie. Möglich scheint der Beweis, wie schon die Beweise von Legendre und Bertrand zeigen. Indessen ist das Verfahren bei Legendre etwas weitläuftig, auch ist hier und da noch Einiges zweifelhaft und dunkel, z. B. wenn auf indirecten Wege gesetzt wird, daß, wenn das Product des halben Umfanges in den Halbmesser eines Kreises nicht die Fläche desselben sey, so drücke es die Fläche eines andern Kreises aus, wobei sich zweifeln läßt, ob jenes Product überhaupt die Fläche eines Kreises ausdrücke; oder wenn man sich den Uebergang einer aus graden zusammengesetzten Linie in eine krumme vorstellen soll, welches dunkel ist u. s. w. Strenger und kürzer kann man, glaube ich, auf folgende Weise verfahren:

213.

Zuerst läßt sich folgender allgemeine Satz, welcher die Schwierigkeit des Uebergangs vom Graden zum Krummen, nicht allein beim Kreise, sondern bei krummen Linien überhaupt hebt, ohne in die Schwierigkeit zu verfallen, die mit dem Unendlich Kleinen verbunden ist, aufstellen, nämlich:

Wenn zwei Größen A und B die Eigenschaft haben, daß sie immerfort zugleich, nur ab- oder nur zunehmen, und also solche Größen sind, die oben (§. 207.) zusammengehörige Größen genannt wurden, und die eine A nähert sich immerfort einer gewissen Grenze P, sie mag sie erreichen können oder nicht, so ist der zu dieser Grenze gehörige Werth von B, z. B. Q, auch die Grenze die Veränderung von B, und wenn A immerfort zugenommen hat, so daß P größer ist als jedes A, so ist auch Q größer als jedes B. Hat A immerfort abgenommen, so daß P kleiner als jedes A ist, so ist auch Q kleiner als jedes B.

Denn, sollte im ersten Falle Q kleiner, im zweiten grösser seyn als irgend ein anderes B, so müßte nothwendig ein Wechsel des Zunehmens und Abnehmens Statt gefunden haben, welches gegen die Voraussetzung ist.

Auf diesen Satz können nun die Sätze vom Kreise gegründet werden, nämlich:

214.

Der Unterschied der Flächen um- und eingeschriebener regelmäßiger Vielecke kann durch Vervielfältigung der Seiten der Vielecke so klein gemacht werden, als man will. Denn es sei (Fig. 7) AB eine Seite des eingeschriebenen Vielecks, DE die parallele Seite des umschriebenen Vielecks von eben so vielen Seiten, so ist der Unterschied der Flächen $= \frac{DE + AB}{2} . FG$, woraus folgt, daß der Unterschied der Flächen der ganzen Vielecke, dem halben Product der Summe ihrer Umfänge in den Abstand ihrer Seiten gleich ist. Nun ist in dem Dreieck AGC, $AC < AG + GC$ oder $AC - GC < AG$, also, weil $AC - GC = FG$ ist, $FG < AG$. Aber AG kann durch Vervielfältigung der Seiten so klein werden als man will, also auch FG, mithin auch der Unterschied der Flächen der Vielecke.

Daraus folgt, daß um so mehr der Unterschied zwischen der Fläche des Kreises und dem um- oder eingeschriebenen Vieleck durch Vervielfältigung der Seiten, so viel als man will verkleinert werden kann, weil jedes umschriebene Vieleck größer, jedes eingeschriebene Vieleck kleiner ist als der Kreis. Also ist die Kreisfläche die Grenze, welcher sich die Flächen der in- und umschriebenen Vielecke ohne Ende nähern.

215.

Der Umfang jedes eingeschriebenen regelmäßigen Vielecks ist kleiner, und der Umfang jedes umschriebenen regelmäßigen Vielecks größer als der Kreis-Umfang. Denn die Fläche der in- und umschriebenen Vielecke nähert sich, wenn die Zahl der Seiten zunimmt, der Fläche des Kreises ohne Ende, und kann derselben, ohne im Zu- oder Abnehmen zu wechseln, so nahe kommen, als man will. Nun verändert sich auch der Umfang der Vielecke regelmäßig mit dem Inhalt zugleich, und nimmt nie ab, wenn der Inhalt zunimmt, und umgekehrt. Also sind Inhalt und Umfang zusammengehörige Größen (§. 206.). Die Grenze

für den Inhalt der Vielecke aber ist der Inhalt des Kreises. Die mit dieser Grenze zusammengehörige Größe ist der Umfang des Kreises, also ist der Umfang des Kreises die Grenze für die Umfänge der eingeschriebenen und umschriebenen Vielecke. Folglich ist der Kreisumfang größer als der Umfang jedes eingeschriebenen, und kleiner als der Umfang jedes umschriebenen Vielecks.

216.

Außer dem Kreis-Umfange ist keine Linie, weder eine grade noch krumme, noch gemischt grade und krumme, also auch kein zweiter Kreis-Umfang zwischen allen in- und umschriebenen Vielecken zugleich möglich.

Denn jede Linie, die von dem Kreise ganz oder zum Theil abweicht, würde Punkte haben, deren Entfernung vom Mittelpunkt, von dem Halbmesser des Kreises um irgend eine Größe verschieden ist. Am weitesten entfernen sich die eingeschriebenen und umschriebenen regelmäßigen Vielecke von einander, wenn die Seiten der letztern den Kreis in den Ecken der erstern berühren, z. B. wie in Fig. 8.

Die rechtwinklichen Dreiecke AEC und AEG sind ähnlich, weil sie einen gemeinschaftlichen Winkel EAC haben, also ist AG kleiner als EG, sobald EG kleiner als GC ist. Aber EG kann so klein seyn als man will, während sich alsdann GC immer mehr dem Halbmesser nähert; also kann um so mehr AG so klein seyn wie man will, folglich auch kleiner als die Größe, um welche irgend eine Linie vom Kreise abweicht. Mithin ist außer dem Kreise keine Linie zwischen allen eingeschriebenen und umschriebenen Vielecken, und folglich auch kein zweiter Kreis möglich.

217.

Die Fläche des Kreises ist gleich der Hälfte des Products seines Halbmessers in seinen Umfang.

Denn die Hälfte des Products des Halbmessers in den Umfang eines beliebigen umschriebenen Vielecks giebt dessen

Inhalt und folglich eine Fläche die größer ist als der Kreis. Die Hälfte des Products des Halbmessers in dem Umfang eines beliebigen eingeschriebenen Vielecks giebt den Inhalt eines Vielecks von der doppelten Seitenzahl, weil z. B. (Fig. 9.) $\frac{1}{2}$ AC . BD = ABCD ist, also eine Fläche, die kleiner ist als die Kreisfläche.

Also muß die Kreisfläche gleich der Hälfte des Products des Halbmessers in eine Linie seyn, die kleiner ist als der Umfang jedes umschriebenen, und größer als der Umfang jedes eingeschriebenen Vielecks. Eine solche Linie ist der Kreisumfang (§. 216.), und zwar er allein und keine andere Linie, die etwa ebenfalls zwischen allen umschriebenen und allen eingeschriebenen Vielecken liegen mag, und von welcher würde bewiesen werden können, daß sie auch länger als der Umfang jedes eingeschriebenen und kürzer als der Umfang jedes umschriebenen Vielecks sey, weil es gar keine solche Linie giebt (§. 216.); auch kein anderer Kreisumfang: also ist die Kreisfläche gleich der Hälfte des Products des Halbmessers in den Kreisumfang.

218.

Die Umfänge zweier Kreise verhalten sich wie ihre Halbmesser. Denn alle ein- und umgeschriebene Vielecke des einen Kreises verhalten sich zu denen des andern Kreises von gleicher Seitenzahl, wie die Halbmesser. Nun ist der Umfang des einen Kreises größer, als alle in ihn eingeschriebenen, und kleiner als alle um ihn beschriebenen Vielecke; also kann die Linie, welche von ihnen eben das Vielfache ist, wie der Halbmesser des zweiten Kreises vom Halbmesser des ersten, oder wie der Umfang der Vielecke des zweiten Kreises von dem Umfange der ähnlichen Vielecke des ersten Kreises, auch nur eine Linie seyn, die größer ist als alle eingeschriebene und kleiner als alle umschriebene Vielecke. Eine solche Linie ist aber allein der zweite Kreis selbst, und kein anderer Kreis (§. 216.). Folglich verhalten sich die Umfänge der beiden Kreise, wie ihre Halbmesser.

219.

Die Sätze (§. 215. 217. 218.) sind die Hauptsätze vom Kreise, und alle übrige folgen daraus unmittelbar. In denselben befindet sich der Satz: daß die Sehne kürzer ist als der zugehörige Kreisbogen, nicht besonders bewiesen. Dieses rührt daher, weil der Beweis des Satzes (§. 215.) jenen Satz, nebst seinem Beweise, einschließlich enthält.

Will man den Satz von der Sehne besonders aufstellen, so kann man ihn auch sogleich auf alle Linien die nicht grade sind, ausdehnen und allgemein beweisen, daß die grade Linie zwischen zwei Punkten kürzer ist als jede andere zwischen den nämlichen Punkten. Hierzu sind dann noch folgende Erklärungen und Sätze vorher nöthig.

220.

Wenn eine krumme Linie (Fig. 10.) von einer geraden geschnitten wird, und der, zwischen zwei zunächst auf einander folgenden Durchschnittspunkten A und C liegende Theil ABC der Curve, hat die Eigenschaft, daß die grade Linie DE, welche zwei beliebige Puukte D und E der Curve ABC mit einander verbindet, ganz zwischen der Curve und der graden Linie AC liegt, so heißt dieser Theil ABC von der Curve, concav gegen AC.

Ein solches concaves Curvenstück hat die Eigenschaft, daß in dasselbe kein Vieleck mit einspringenden Winkeln beschrieben werden kann.

Denn B sey eine beliebige Ecke des Vielecks, nämlich der Durchschnittspunkt der beiden Seiten DB und DE des Vielecks, so fällt die Linie DE, welche die Endpunkte dieser Seite verbindet, nach der Voraussetzung, ganz zwischen die Curve ADBEC und die Linie AC, mithin ist DBC kleiner als zwei rechte und folglich kein einspringender Winkel.

Daraus folgt, daß der Inhalt des in die Curve ABC beschriebenen Vielecks immer fort zunimmt, wie man die Zahl der Seiten des Vielecks vergrößert. Dieser Inhalt des Vielecks kann dem Inhalte der Curven Fläche so nahe kommen als man will, denn wenn z. B. PB und QC auf BC

senkrecht sind und PQ mit BC parallel ist, so ist das Dreieck BEC die Hälfte des Parallelogramms BC, welches größer ist als der Curvenabschnitt BEC; folglich beträgt das Dreieck BEC mehr als die Hälfte des Curvenabschnitts BEC und es wird durch jede zwei neue Seiten mehr als die Hälfte von dem Unterschiede der Vielecks und der Curvenfläche hinweggenommen; also kann der Unterschied so klein werden als man will. Der Inhalt des umschriebenen Vielecks ist also eine Größe, die, immer fort zunehmend, sich dem Inhalte der Curvenfläche, als einer bestimmten Grenze, nähert, welche sie zwar nie erreichen kann, und die immer größer bleibt, als jedes mögliche eingeschriebene Vieleck, der sie aber so nahe kommen kann als man will.

Nun wächst der Umfang der eingeschriebenen Vielecke, so wie die Zahl der Seiten zunimmt, mit dem Inhalt des Vielecks regelmäßig zugleich; denn z. B. AD + DB ist größer als AB, und BE + EC ist größer BC, so daß der Umfang des Vielecks ADBEC größer ist als der Umfang von ABC. Also sind Umfang und Inhalt des Vielecks zusammengehörige Größen, mit der Eigenschaft, daß nie die eine abnimmt, wenn die andere wächst, und umgekehrt. Die Grenze für den Inhalt des Vielecks ist der Inhalt der Curvenfläche, und die mit dieser zusammengehörige Größe des Umfanges ist die Länge der Curve. Also ist die Länge der Curve die Grenze für den Umfang der Vielecke (§. 213.) folglich ist die Curve ABC länger als der Umfang jedes eingeschriebenen Vielecks. Der Umfang jedes eingeschriebenen Vielecks aber ist länger als die grade Linie AC; denn schon AB + BC ist länger als AC und der Umfang aller übrigen Vielecke noch länger; also ist nothwendig die concave Linie länger als die grade AC.

Nun kann ferner jede ungleiche Linie in lauter aufeinander folgende concave Bogenstücke getheilt werden, wie (Fig. 11.) ABCDE; also ist die krumme Linie länger als die Summe der graden AB, BC, CD, DE. Diese Summe aber ist länger als die grade Linie EF; also ist um so mehr die krumme, oder allgemein jede Linie die nicht grade ist, länger als eine grade zwischen den nämlichen Endpunkten.

Man kann den Satz auch auf eine andere jedoch ähnliche Art beweisen.

221.

Mittelst Perpendikel (Fig. 12.) $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ ꝛc. auf die grade Linie AE, von welcher gezeigt werden soll, daß sie kürzer ist als die krumme $\alpha\beta\gamma$.... theilte man die letzte in beliebige Theile, die aber die Eigenschaft haben, daß die Tangente an keinem Punkt eines Theils, denselben Theil zum zweitenmal, außer etwa im Berührungspunkt selbst, schneidet, auch innerhalb eines Theils nicht zwei parallele Tangenten möglich sind. Dieses geht allemal an, weil man nur die Theile klein genug annehmen darf. AB Fig. 13. (§. 213.) sey ein solcher Theil. Man ziehe diejenige Tangente an dieselbe, die mit der Grundlinie den kleinsten Winkel macht, z. B. BK, so schließt dieselbe mit der Curve und dem Perpendikel einen gewissen Raum AKB ein. Die Tangente zwischen den Perpendikeln aber ist nothwendig länger als die Grundlinie PQ, in so fern sie nicht etwa mit ihr parallel läuft. In keinem Fall ist sie kürzer. Nun theile man die Curve AB in zwei kleinere Theile mittelst des Perpendikels RC, und ziehe in demjenigen Theil AC, in welchem der Berührungspunkt der ersten Tangente nicht liegt, diejenige Tangente, die den kleinsten Winkel mit der Grundlinie macht, z. B. AL. Da dieser kleinste Winkel nothwendig größer ist, als der Winkel, den die erste Tangente mit der Grundlinie macht, weil die erste Tangente, von allen an der ganzen ungetheilten Linie AB, der Grundlinie am nächsten kam, so ist die Summe von AL und MB größer als KB. Dieses ist der Fall, wo man auch das Perpendikel RC zwischen P und Q ziehen mag. Da nun die Wahl des Punktes R frei ist, so kann man das Perpendikel RC allemal so ziehen, daß der Raum ALC, welchen die neue Tangente AL mit dem neuen Perpendikel LC und der Curve AC einschließt, kleiner ist als der Raum ACKM zwischen dem nämlichen Perpendikel, der Curve und der vorigen Tangente, weil die neue Tangente AL, wenigstens zunächst dem Punkt A, der Curve näher kommt als die vorige BK. Daraus folgt, daß

die Summe der Räume ALC und BMC, den die beiden Tangenten mit der Curve und den Perpendikeln einschließen, kleiner ist als der Raum AKB zwischen der ersten Tangente, der Curve und dem ersten Perpendikel, während die Länge der Tangenten AL + MB größer ist als die Länge der ersten Tangente KB. So verhält es sich bei jeder neuen Theilung, woraus folgt, daß die Summe der Räume zwischen der Curve, den Tangenten und den Perpendikeln und die Summe der Länge der Tangenten zusammengehörige Größen sind, und zwar von der Art, daß die eine, nämlich die erste, immerfort abnimmt, während die andere, nämlich die zweite, immerfort wächst, niemals beide zugleich zu- oder abnehmen. Die Grenze für die Summe der Räume aber ist o, weil die Tangenten der Curve so nahe kommen können, als man will. Die mit dieser Grenze zusammengehörige Längen Größe ist die Länge der Curve; also ist die Länge der Curve nothwendig größer als die Länge der Grundlinie. Und da das Nämliche für jeden Theil der Curve $\alpha\beta$, $\beta\gamma$..... Fig. 12. (§. 212.) gilt, so gilt der Satz auch für die ganze Curve.

222.

Merkwürdig ist auch der nicht sehr bekannte Bertrandsche Beweis des Satzes, daß eine grade Linie zwischen zwei Punkten kürzer ist als jede andere. Er steht im zweiten Bande des developpement des mathematiques, Seite 115. Man lege nämlich die graden Linien AB und CB in AC so, daß die Punkte A und C an ihren Ort bleiben, so fällt B über M hinaus, etwa in N, während C in M fällt. Legt man also die Bogenstücke ADB und BEC, so wie sie an AB und BC liegen auch an AN und CM, so müssen sich dieselben nothwendig schneiden, weil eine stetige Linie, z. B. ARN von N nicht aus dem geschlossenen Raum MSC hinaus, nach A kommen kann, ohne MSC zu schneiden. Also ist die Linie ARTSC kürzer als die Linie ARN + MSC, die der Linie ADBEC gleich ist, denn es fehlen daran die Stücke TM und TN. Mithin ist ADBEC nicht die kürzeste von allen Linien zwischen A und C. Aber eben das gilt von jeder andern concaven

Linie die nicht grade ist. Also ist nur allein die grade AC die kürzeste zwischen A und C. Daraus folgt weiter, wie oben, daß überhaupt jede mögliche Linie, weil sie in concave getheilt werden kann, länger ist als die grade.

Der Beweis ist ebenfalls strenge, nur kann derselbe nicht wohl bei dem Saß, daß die Ebene kleiner sey als jede andere Fläche zwischen den nämlichen Grenzen, nachgeahmt werden, was mit dem vorigen angeht.

223.

Nachdem bewiesen worden, daß die grade Linie kürzer ist als jede andere, läßt sich leicht zeigen, daß jede umschließende Linie länger ist als die umschlossene, die eine oder die andere mag krumm, oder aus graden zusammengesetzt seyn. Denn unter den umschließenden Linien muß es nothwendig eine geben, die kürzer ist als alle andern. Diese kürzeste Linie aber ist immer eine umschließende. Denn an jeder umschließenden ABC kann irgend eine grade Linie EF gezogen werden, die kürzer ist als der Theil EBF, so daß AEFC kürzer ist wie AEBFC, woraus folgt, daß keine, von ADC verschiedene, umschließende Linie möglich ist, die kürzer wäre als alle Uebrigen, und daß also allein ADC selbst die kürzeste, und folglich die umschlossene Linie ADC kürzer ist, als jede umschließende ABC.

224.

Schickt man so die allgemeinen Beweise, daß die grade Linie die kürzeste und jede umschließende Linie länger ist als die umschlossene, voraus, so ist der Beweis (§. 215.) für den Kreis, daß nämlich der Kreisumfang länger ist als der Umfang jedes eingeschriebenen und kürzer als der Umfang jedes umschriebenen regelmäßigen Vielecks, nicht besonders nöthig.

Jedoch scheint es in der Elementar-Geometrie besser, bloß bei dem besondern Beweise für den Kreis wie in §. 215. zu bleiben, weil die allgemeinen Beweise, allgemeine Sätze und Begriffe von Curven erfordern, die in der Elementar-Geometrie, welche von den Curven bloß den Kreis abhandelt, noch nicht nöthig sind.

B. Von den runden Körpern.

225.

Ganz wie die Sätze vom Kreise können, mit Hülfe des allgemeinen Satzes (§. 213.), die Sätze von der Oberfläche und dem Inhalt runder Körper bewiesen werden.

I. Vom **Cylinder** nämlich ist der Inhalt die Grenze, welcher sich der Inhalt der Prismen über den, in- und um die Grundfläche beschriebenen Vielecken, ohne Ende nähert. Gleichförmig mit dem Inhalt dieser Prismen verändert sich die Oberfläche derselben; also sind Inhalt und Oberfläche der Prismen **zusammengehörige Größen**. Nun ist die mit der Grenze für den Inhalt der Prismen, nämlich mit dem Inhalt des Cylinders, zusammengehörige Größe, die Oberfläche des Cylinders; also ist die Oberfläche des Cylinders die Grenze für die Oberfläche der in- und umschriebenen Prismen. Da nun die Oberfläche jedes um- und eingeschriebenen Prismas gleich ist dem Product der Höhe in den Umfang des Prisma's, so ist die Oberfläche des Cylinders gleich dem Product der Höhe in eine Linie, die länger ist als der Umfang jedes in die Grundfläche eingeschriebenen, und kürzer als der Umfang jedes umschriebenen Vielecks. Eine solche Linie ist der Umfang der kreisförmigen Cylinder-Grundfläche, und zwar liegt nur eine einzige Linie, und folglich auch nur ein einziger Kreisumfang zwischen allen, um und in die Grundfläche beschriebenen Vielecken (§. 216.). Folglich ist die Cylinderfläche gleich dem Product des Umfanges der Grundfläche in die Höhe.

Der **Inhalt** des Cylinders liegt zwischen dem Inhalt aller um- und eingeschriebenen Prismen. Der Inhalt der Prismen aber ist gleich dem Producte der Höhe in die Grundfläche. Also ist der Inhalt des Cylinders gleich dem Product der Höhe in eine Grundfläche, die zwischen den Grundflächen aller um- und eingeschriebenen Prismen fällt. Eine solche Grundfläche ist die Grundfläche des Cylinders, und zwar diese allein (§. 216.). Also ist der Inhalt des Cylinders gleich dem Product seiner Höhe in die Grundfläche.

II. Für den **Kegel** ist der Gang der Beweise der näm-

liche, wenn man statt Prismen, allemal „Pyramiden über die Grundfläche" setzt.

III. Bei der **Kugel** und den **Kugelschnitten** werden Inhalt und Umfang mit Hülfe der Sätze vom Kegel gefunden, und es ist ohne besondere Ausführung leicht zu sehen, wie der obige Beweis auch auf die Kugel angewendet werden kann.

226.

Bei allen diesen Sätzen ist der Beweis, daß die Ebene zwischen bestimmten Grenzen, kleiner sey als jede andere Fläche wischen den nämlichen Grenzen, nicht besonders nöthig, sondern mit den Sätzen, für jeden besondern Fall, sogleich verbunden. Abgesondert und allgemein läßt sich der Beweis wie folgt geben.

Wenn eine krumme Fläche von einer Ebene geschnitten wird, und der von der Durchschnittslinie begrenzte Theil der krummen Fläche hat die Eigenschaft, daß jede andere Ebene die ihn schneidet, ganz zwischen die krumme Fläche und die Grundebene fällt, so heißt der von der Grundebene begrenzte Theil der krummen Fläche, **concav gegen die Grundebene**, und von solchen concaven Flächen läßt sich allgemein beweisen, daß sie größer sind als die Grundebenen zwischen den nämlichen Grenzen.

Der Durchschnitt jeder andern Ebene mit einer solchen concaven krummen Fläche ist nämlich allemal eine concave Linie. Denn wenn außer der schneidenden Ebene noch eine zweite Ebene die krumme Fläche und zugleich die erste Ebene schneidet, so ist der Durchschnitt der beiden Ebenen eine grade Linie, die in beiden Ebenen zugleich liegt und zwei Punkte der krummen Oberfläche verbindet. Da nun die schneidenden Ebenen, nach der Voraussetzung, ganz innerhalb der krummen Oberfläche liegen, so liegt auch ihr Durchschnitt ganz innerhalb der krummen Oberfläche, folglich auch ganz innerhalb der krummen Linien, welche die schneidenden Ebenen begrenzen, oder welche die Durchschnitte der Ebenen mit der krummen Fläche sind. Da aber das nämliche von jeder möglichen Linie in den Ebenen gilt, so ist der Durchschnitt jeder Ebene mit der krum-

men Fläche eine concave Linie (§. 220.). Folglich ist auch allemal der Durchschnitt der Grundebene mit der krummen Fläche eine concave Linie.

Nun beschreibe man in der die Grundebene begrenzenden, concaven Linie (Fig. 15.), ein beliebiges Vieleck ABCDEF. Dasselbe kann, weil die Linie concav ist, keine einspringende Winkel haben (§. 220.). Man theile das Vieleck in beliebige Dreiecke, jedoch so, daß die Seiten des Vielecks für jetzt ungetheilt bleiben. In den Ecken der Dreiecke errichte man Perpendikel auf die Grundebene, die alle die concaven Flächen schneiden werden, und lege durch die Punkte, in welchen die Perpendikel über den Eckpunkten der Dreiecke die krumme Fläche schneiden, neue Ebenen, so bilden dieselben ein Polyëder, welches von lauter dreieckigen Seitenebenen umschlossen ist. Jede Seitenebene liegt senkrecht über dem zugehörigen Dreieck in der Grundebene und keine Seitenebene kann kleiner seyn als das darunter liegende Dreieck, sondern jede, die nicht etwa parallel mit der Grundebene ist, ist größer. Also ist die Oberfläche des Polyëders allemal größer als das eingeschriebene Vieleck ABCDEF. Keine körperliche Ecke des Polyëders kann in das Polyëder einspringen, denn man lege z. B. in G, außen an die Fläche, eine Ebene welche sich berührt, so liegt die concave Fläche ganz auf einer Seite der berührenden Ebene, folglich liegen auch alle Punkte A, B, H, I, K, L, welche durch die in G zusammenlaufende Kanten des Polyëders, mit G verbunden werden, auf derselben Seite der berührenden Ebene, mithin liegen auch alle die Linien GA, GB, GL ꝛc. auf der nämlichen Seite der berührenden Ebene, folglich schneidet eine, mit der berührenden parallel laufende, und die krumme Oberfläche schneidende Ebene, jene Linien alle innerhalb der krummen Fläche, mithin bilden die Ebenen AGB, BGL ꝛc. mit der, der berührenden parallelen Ebene, eine Pyramide, deren körperliche Ecke G nothwendig ausspringend ist. Da das nämliche von jeder Ecke des Polyëders gilt, so hat das Polyëder keine ausspringende Ecken.

Nun theile man jedes Dreieck in vier Dreiecke, und zwar so, daß man die Seiten theilt, wie z. B. ABG in der

Figur, und ziehe durch die neuen Eckpunkte wieder Perpendikel auf die Grundebene, so liegen die Punkte, in welchen diese Perpendikel die krumme Fläche schneiden, nothwendig außerhalb des Polyëders, von welchem das über ABG liegende Dreieck eine Seitenfläche ist, weil der ganze über ABG liegende Theil der krummen Fläche außer diesem Polyëder liegt. Legt man also durch die Durchschnittspunkte der neuen und der alten Perpendikel mit der krummen Fläche, Ebenen, so liegen auch diese außer dem ersten Polyëder, folglich ist das auf diese Weise gebildete neue Polyëder an Inhalt größer als das vorige. Zugleich aber ist seine Oberfläche größer; denn die über jeder Ebene liegenden neuen kleinern Ebenen sind zusammen größer als die Ebenen über welchen sie liegen. Also sind Inhalt und Oberfläche der in die krumme Oberfläche beschriebenen Polyëder, zusammengehörige Größen, das heißt, Größen, von welchen nie die eine zunimmt, wenn die andere abnimmt, und umgekehrt.

Nun kann man, wie leicht zu sehen, durch Vermehrung der Zahl der Seitenebenen des Polyëders, dem Inhalt des von der krummen Fläche und der Grundebene eingeschlossenen Körpers so nahe kommen als man will; also ist der Inhalt dieses Körpers die Grenze des Inhalts aller eingeschriebenen Polyëder. Die mit dieser Grenze zusammengehörige Oberfläche ist die krumme, also ist die krumme Oberfläche, die Grenze für die Oberfläche der Polyëder (§. 213.) folglich ist die krumme Oberfläche größer als die Oberfläche jedes Polyëders, mithin um so mehr größer als die Grundebene, und folglich ist die Ebene kleiner als jede concave Fläche zwischen den nämlichen Grenzen.

227.

Ist die Fläche nicht concav, sondern vielleicht concav und convex zugleich, wie z. B. der innere Theil der Oberfläche eines ringförmig gebogenen runden Stabes, oder von irgend einer andern Gestalt, so kann man mit dem Beweise, daß die krumme Fläche größer sey, als die senkrecht darunter liegende Ebene, nach der zweiten für den Beweis des ähnlichen

Satzes,

Satzes (§. 221.), daß jede krumme Linie länger ist, als eine senkrecht darunter liegende Grade, gebrauchten Methode, verfahren.

Ist nämlich die Projection der Grenze der krummen Fläche auf die Grundebene, eine gradlinige Figur, so theile man dieselbe auf irgend eine Weise, z. B. durch Dreiecke, wie in Fig. 15., in so kleine Theile, daß die darüber liegenden Theile der krummen Fläche die Eigenschaft haben, von der Tangenten-Ebene an keinen Punkt, in mehr als etwa in dem Berührungspunkt selbst, geschnitten zu werden, und auch keine zwei parallele Tangenten-Ebenen zu haben. Darauf ziehe man an einen der Theile der krummen Fläche, z. B. an den über GIK liegenden Theil G′I′K′, diejenige Tangenten-Ebene, welche von der Grundfläche am wenigsten abweicht, so schließt dieselbe mit der krummen Fläche und den Seitenebenen GI, GK und IK, welche, auf die Grundebene senkrecht stehend, den Theil GIK der krummen Fläche absondern, einen gewissen Raum ein. Der zwischen den Seitenebenen liegende Theil der Tangenten-Ebene ist aber, so lange die Tangenten-Ebene nicht etwa mit der Grundebene parallel ist, allemal kleiner als seine Projection GIK auf die Grundebene, niemals größer. Nun theile man GIK, in der Grundebene, in kleinere Theile z. B. GIP und GPK und ziehe an denjenigen Theil, in welchem der Berührungspunkt der vorigen Tangenten-Ebene, nicht liegt, z. B, an den Theil GIP, eine neue Tangenten-Ebene, und zwar diejenige, die der Grundebene am nächsten kommt, so weicht diese neue Tangenten-Ebene nothwendig mehr von der Grundebene ab als die erste Tangenten-Ebene, weil diese unter allen, im ganzen Raum GIK, der Grundebene am nächsten kam. Folglich ist die Summe der beiden Tangenten-Ebenen über GIP und GIK größer als die erste Tangenten-Ebene über GIK, wie auch GP gezogen werden mag. Da aber GP willkührlich ist, so kann es allemal so gezogen werden, daß der körperliche Raum, den die neue Tangenten-Ebene über GIP mit der krummen Fläche und den Seitenebenen GI, GP und IP einschließet, kleiner ist als der Raum zwischen der vorigen Tangenten-Ebene über GIP, der krummen Fläche und den nämlichen Seitenebenen, weil die neue

Tangenten-Ebene, wenigstens zunächst an dem Berührungspunkt, der krummen Fläche näher kommt als die erste Tangenten-Ebene. Also ist die Summe der Räume, welche die beiden Tangenten-Ebenen über GIP und GPK mit den sie begrenzenden Seitenebenen und der krummen Fläche einschließen, kleiner als der Raum zwischen der einen Tangenten-Ebene über der ganzen Figur GIK, den sie begrenzenden Seitenebenen, und der krummen Fläche, während zugleich die Summe der einzelnen Tangenten-Ebenen größer ist. So verhält es sich nach jeder neuen Theilung; also sind die Summen des Flächeninhalts der Tangenten-Ebenen zwischen den sie begrenzenden Seitenebenen und die Summen des körperlichen Inhalts der Räume zwischen den Tangenten-Ebenen, den begrenzenden Seitenflächen und der krummen Fläche, zusammengehörige Größen, von der Art, daß die erste ohne Ausnahme wächst, wenn die andere abnimmt, niemals beide zugleich wachsen oder abnehmen. Die Grenze der einen dieser beiden Größen, nämlich des körperlichen Raums, ist 0, denn man kann mit der Tangenten-Ebene der krummen Fläche so nahe kommen als man will. Die mit dieser Grenze zusammengehörige Flächen-Größe ist die krumme Fläche über GIK, also ist diese größer als die Summe aller auf die obige Weise gezogenen Tangenten-Ebenen. Jede solche Summe aber ist größer als die Projektion GIK der krummen Fläche auf die Grundebene. Also ist die krumme Fläche über GIK um so mehr größer als der senkrecht darunter liegende Theil GIK der Grundebene. Da dieses nun von jedem Theil der Grundebene und der darüber liegenden krummen Fläche gilt, so folgt, daß jede von geraden Linien begrenzte Ebene kleiner ist als eine beliebige senkrecht darüber liegende krumme Fläche.

Ist ferner die Ebene von einer krummen Linie begrenzt, wie in Fig. 15., so kann man erstlich mit einer gradlinigen Figur ABCDEF der krummen Grenze so nahe kommen als man will, die krumme Linie ABCDEF mag concav oder convex seyn. Der über der gradlinigen Figur liegende Theil der krummen Fläche aber, ist bewiesenermaaßen größer als ABCDEF, also ist der über der krummlinigen, größern Figur ABCDEF

liegende Theil der krummen Fläche um so mehr größer als die gradlinige ebene Figur ABCDEF. Wäre nun etwa die krummlinige ebene Figur ABCDEF größer als die darüber liegende krumme Fläche, so wäre die krumme Fläche nothwendig einem Theile der krummlinigen ebenen Figur ABCDEF gleich. Welches aber auch dieser Theil seyn mag, so läßt sich immer eine eingeschlossene gradlinige ebene Figur ABCDEF angeben, die größer ist als jener Theil, weil man mit der gradlinigen Figur ABCDEF der krummlinigen ABCDEF so nahe kommen kann als man will. Die ganze krumme Fläche aber war größer als jede gradlinige ebene Figur ABCDEF, also ist es unmöglich, daß sie irgend einem Theile der krummlinigen ebenen Figur ABCDEF gleich, oder was dasselbe ist, daß die krummlinige ebene Figur ABCDEF größer als die darüber liegende krumme Fläche seyn kann. Höchstens also könnte noch eine der andern gleich seyn. Angenommen dies letzte wäre möglich, so schneide man mit irgend einer, mit der Grundebene nicht parallelen Ebene G′I′K′ einen Theil der krummen Oberfläche ab. Dieser Theil kann nur allenfalls der Ebene G′I′K′ gleich, nicht kleiner seyn als sie. Also wäre die übrige krumme Fläche mit der Ebene G′I′K′ zusammen der krummlinigen ebenen Figur ABCDEF gleich. Sie ist aber größer, weil die mit ihrer Projection nicht parallele Ebene G′I′K′ größer ist als diese Projection. Also ist es unmöglich, daß irgend eine krumme Fläche der senkrecht unter ihr liegenden krummlinigen ebenen Figur gleich ist. Kleiner kann sie auch nicht seyn, also ist sie nothwendig größer. Folglich ist ganz allgemein jede krumme Fläche größer als ihre Projection auf eine Ebene.

228.

Steht erst der Satz, daß jede krumme Fläche größer ist als ihre Projection auf eine Ebene, allgemein fest, so ist derjenige, daß jede umschließende Fläche größer ist als die umschlossene, zwischen einerlei Grenzen, leicht zu beweisen. Denn nothwendig muß es unter den umschließenden Ebenen eine geben, die kleiner ist als alle übrigen. Diese kleinste Ebene aber

ist nur die umschlossene selbst. Denn von jeder umschließenden kann man irgend ein Stück mittelst einer zwischen ihr und der umschlossenen, durchgehenden Ebene abschneiden, wodurch eine neue umschließende Ebene entsteht, die kleiner ist als die vorige, weil die Ebene kleiner ist als das abgeschnittene Stück der Fläche, woraus folgt, daß keine umschließende Fläche möglich ist, die kleiner wäre als alle übrigen, und daß also die umschlossene allein die kleinste, folglich die umschlossene Fläche kleiner ist als jede umschließende.

IV. Ueber den Beweis des Satzes vom körperlichen Inhalt der Pyramide.

229.

Wenn man nicht, wie Legendre, den Satz, daß der körperliche Inhalt einer Pyramide gleich ist dem körperlichen Inhalt eines Prisma von der nämlichen Höhe und Grundfläche, indirect beweisen will, so kann man ihn auf die Theilung des dreiseitigen Prisma in drei Pyramiden von gleicher Höhe und Grundfläche gründen, wie Euclides thut (12s Buch 3r Satz). Dann aber ist der Beweis des Satzes nöthig, daß Pyramiden von gleichen Höhen und Grundflächen einander an körperlichen Inhalt gleich sind, oder daß sich der Inhalt von Pyramiden, die gleiche Höhe haben, wie die Grundfläche verhält. Euclides giebt diesen Beweis durch die Exhaustions-Methode sehr strenge. Andere Geometer bedienen sich der Zertheilung der Pyramiden von gleicher Höhe und Grundfläche in unendlich viele und unendlich dünne mit der Grundfläche parallele Schnitte, deren Höhen und Grundflächen gleich sind, um dadurch die Gleichheit der Pyramiden, deren Volumen die Summen dieser Schnitte sind, fühlbar zu machen.

Dieses letzte Verfahren ist unstreitig kürzer, und kann auch einen strengen Beweis geben, in so fern etwa unter unendliche Größen, solche verstanden werden, die kleiner oder größer sind als alle möglichen Größen; allein, da die Schnitte nicht Prismen sind, wofür sie genommen werden, sondern ab-

gekürzte Pyramiden, von deren Inhalt man noch nichts weiß, ehe nicht erst der Satz, der bewiesen werden soll, bewiesen worden ist, so muß gezeigt werden, daß durch die willkührliche Verwechselung der abgekürzten Pyramiden mit Prismen, selbst in der Summe, kein Fehler entsteht. Dieses kann wie folgt geschehen, und zwar ohne unendlich kleine, selbst ohne sehr kleine Schnitte zu Hülfe zu nehmen.

230.

Zuerst ist klar, daß in beliebigen Pyramiden von gleich großen Grundflächen und Höhen, alle Schnitte in gleicher Höhe über der Grundfläche, oder gleich tief unter der Spitze, gleich groß sind. Denn da sich die Schnitte wie die Quadrate der Höhen verhalten, so ist, z. B. wenn die Grundfläche einer Pyramide durch a^2, ihre Höhe durch h bezeichnet wird, der Schnitt in der Höhe x von oben, gleich $a^2 \cdot \frac{x^2}{h^2}$. Diese Größe bleibt für dieselbe Grundfläche a^2, für dieselbe Höhe h und für dieselbe Entfernung x des Schnitts von der Spitze unverändert die nämliche, welche Gestalt auch die Grundfläche haben, und wo die Spitze über derselben liegen mag, so lange nur die Größe der Grundfläche und die Höhe die nämliche ist. Also sind alle Schnitte, gleich tief unter der Spitze, gleich groß.

Nun lege man, z. B. wenn zwei dreiseitige Pyramiden gegeben sind, deren Höhen gleich, und deren Grundflächen, obgleich an Gestalt verschieden, ebenfalls gleich groß sind, durch beide Pyramiden beliebige, gleich weit von einander entfernte Ebenen, parallel mit der Grundebene, so wie in der 16ten Figur die Ebenen DEF, GHI, KLM, NOQ rc. Man verlängere diese Ebenen sämmtlich außerhalb der Pyramiden, so weit, daß in jedem ein Dreieck beschrieben werden kann, welches dem zunächst unter der Ebene liegenden Schnitte gleich ist, z. B. die Ebene NOQ bis in NUV, so daß die verlängerten Schenkel NU und NV des Winkels ONQ = LKM den Schenkeln des letztern KL und KM gleich gemacht werden können, wodurch, wenn man UV zieht, das Dreieck NUV dem Dreieck KLM gleich wird. Ferner schneide man von je-

der Ebene ein Stück ab, welches der unmittelbar darüber liegenden Ebene gleich ist, z. B. von der Ebene KLM das Stück KXY = NOQ, welches geschieht, wenn man die Schenkel KX und KY des dem Winkel ONQ gleichen Winkels LKM, gleich NO und NQ macht, und XY zieht. Alsdann verbinde man die oben erweiterten Ebenen mit den unmittelbar darunter liegenden unerweiterten, und die obern unerweiterten Ebenen mit den unmittelbar darunter liegenden Abschnitten, durch Ebenen; welches möglich ist, weil ML und XY, und ML und OQ in einerlei Ebenen liegen, und folglich auch XY und OQ parallel sind; so entstehen zwei Reihen von Prismen, äußere und innere, die einen wie NUVKLM, die andern wie NOQKXU. Die Summe der ersten Reihe macht einen Körper aus, der größer ist als die Pyramide, die Summe der andern Reihe einen Körper, der kleiner ist als die Pyramide. Der Unterschied des körperlichen Inhalts dieser beiden Körper ist dem körperlichen Inhalte des untersten von den äußern Prismen ABSRCT gleich; denn z. B. der Unterschied der beiden Prismen KLV und KXQ ist der Körper XV, der Unterschied der Prismen GHM und GWZ ist der Körper WZ, und es ist leicht zu sehen, daß die Summe aller dieser Körper wie XV, WZ dem Prisma AT gleich ist.

Nun sind alle, sowohl äußere als innere Prismen, in beiden gegebenen Pyramiden einzeln gleich groß, weil sie, wegen der oben erwähnten Gleichheit der Größe der Schnitte, gleiche Grundflächen und darneben gleiche Höhe haben; also sind auch die Summen der äußern und innern Pyramiden, desgleichen die untersten Prismen AT in beiden gegebenen Pyramiden gleich groß. Dieses kann mit völliger Sicherheit angenommen werden, denn es wird ohne alle Dazwischenkunft des Unendlich kleinen, selbst ohne Exhaustion, bloß durch Congruenz bewiesen, daß Prismen von gleicher Höhe und Grundfläche gleich groß sind. Man sehe unter andern den sinnreichen Beweis davon im 6ten Buch von Legendres Geometrie.

Die gegebenen Pyramiden sind aber nun beide größer als die gleichen Summen der innern Prismen, und kleiner als die

gleichen Summen der äußern; also wäre das äusserste, was möglich wäre, daß die eine nur sehr wenig größer wäre als die Summe der innern Prismen, und die andere nur sehr wenig kleiner als die Summe der äußern. Folglich ist der größte mögliche Unterschied der beiden dem körperlichen Inhalt des untersten äußern Prisma's AT gleich.

Hieraus läßt sich auf zweierlei Art die vollkommne Gleichheit der Pyramiden schließen. Die eine beruht darauf, daß der Körper AT kleiner angenommen werden kann, als jede mögliche Größe, denn in der That ist seine Höhe willkührlich und kann also kleiner angenommen werden wie jede Größe, woraus folgt, wie bei Lacroix (Geometrie Seite 169.), daß der mögliche Unterschied AT der beiden Pyramiden wirklich kleiner ist, als jede mögliche Größe, und daß also die Pyramiden an Inhalt gleich sind. Allein dieser Schluß hat einige Schwierigkeit indem von einer Größe die Rede ist, die kleiner seyn soll als jede mögliche Größe, welches eigentlich keine Größe ist.

Deutlicher ist daher folgende zweite Art.

Man gebe nämlich den innern und äußern Prismen irgend eine willkührliche Höhe und folglich eine willkührliche Größe, selbst keinesweges eine sehr kleine, z. B. um eine bestimmte Zahl zu nennen, den vierten Theil der Höhe der Pyramide zur Höhe, so kann der Unterschied des Inhalts der beiden Pyramiden von gleicher Höhe und Grundfläche, möglicherweise, wie bewiesen, obgleich nicht größer seyn als ein Prisma, welches die Grundfläche der Pyramide zur Grundfläche, und den vierten Theil der Höhe der Pyramide zur Höhe hat, so doch derselben sehr nahe kommen. Nun gebe man dem Prisma, dessen Höhe willkührlich ist, statt des vierten, den sechsten Theil der Höhe der Pyramide zur Höhe, so wäre jetzt die Grenze des Unterschiedes der beiden Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe, ein Prisma von der Grundfläche der Pyramide und dem sechsten Theil ihrer Höhe, also möglicherweise eine andere Größe als vorhin. Sie wäre abermals eine andere Größe, wenn man den Prismen wieder einen andern Theil der Höhe der Pyramide zur Höhe

gäbe u. s. w. Also könnte der Unterschied der beiden Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe, wenn ein solcher existirt, möglicherweise eine verschiedene Größe seyn, ohne daß sich die Gestalt der beiden Pyramiden ändert. Dieses aber ist unmöglich, weil zwei unverändert bleibende Körper nur einen Unterschied, nicht verschiedene Unterschiede haben können. Folglich ist es unmöglich, daß die beiden Pyramiden an Inhalt ungleich sind: folglich sind sie an Inhalt gleich.

Diese zweite Art des Beweises kann noch in andern Fällen nützlich seyn. Sie ist dem Beweise des analytischen Satzes, daß wenn in einer Gleichung nur eine Größe willkührlich ist, diese Größe nothwendig Null seyn muß, nachgebildet, und man vermeidet durch dieselbe die Schwierigkeit des Unendlich kleinen und Großen gänzlich.

231.

Unter den mancherlei Beweisen des Satzes vom Inhalt der Pyramiden giebt es noch manche, die in den Lehrbüchern selten oder gar nicht vorkommen. So z. B. folgender, der nicht oft vorkommt.

Man schneide nämlich (Fig. 17.) die gegebene Pyramide mit einer der Grundfläche parallel laufenden Ebene DEF in der halben Höhe, desgleichen mit einer, mit der Kante AP parallel und durch EF gehenden Ebene EFGH, so entsteht ein Prisma DEFAGH. Ferner schneide man die Pyramide mit einer durch E gehenden und mit der Ebene PAC parallelen Ebene EGI, so entstehet ein zweites Prisma GEIHFC, welches dem ersten an Inhalt gleich ist. Denn vollendet man die Parallelepipiden LF und GM, so sind solche, wie leicht zu sehen, an Inhalt gleich, weil sie gleiche Grundflächen LH und GC, und gleiche Höhen haben, die Prismen aber sind die Hälfte davon. Nun werde die Grundfläche der gegebenen Pyramide durch a^2, ihre Höhe durch h bezeichnet, so ist die Grundfläche des Prisma's AGF, $\frac{1}{4}$ a^2 und seine Höhe $\frac{1}{2}$ h, also sein Inhalt $\frac{1}{8}$ $a^2 h$; folglich ist der Inhalt der beiden Prismen AGH und GIF, zusammen gleich $\frac{1}{4}$ $a^2 h$. Die nach

Abzug dieser beiden Prismen von der gegebenen Pyramide übrig bleibenden beiden Pyramiden DEFP und GBIE sind aber, wie leicht zu zeigen, congruent, und der ganzen Pyramide ABCP ähnlich. Also kann mit jeder von ihnen, eine der obigen Theilung der ganzen Pyramide ähnliche Theilung vorgenommen werden. Aus jeder der beiden kleinen Pyramiden lassen sich nämlich wieder zwei Prismen abschneiden, die halb so hoch sind, als die Prismen AGF und GIF, also $\frac{1}{4}$ h zur Höhe haben, und deren Grundfläche ein Viertheil der Grundfläche der Prismen, also $\frac{1}{16}$ a^2 ist, weil ein Gleiches mit den kleinen Pyramiden im Verhältniß gegen die ganze Pyramide Statt findet. Also ist der Inhalt der beiden Prismen aus jeder der kleinen Pyramiden der achte Theil des Inhalts der beiden Prismen AGF und GIF, folglich ist der Inhalt der Prismen aus den beiden kleinen Pyramiden der vierte Theil jenes Inhalts und folglich $= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} a^2 h$.

Nachdem mit jeder der beiden kleinen Pyramiden DEFP und GBIE verfahren worden wie mit der Ganzen, bleiben aus jeder wieder zwei kleine Pyramiden übrig, aus welchen von neuem Prismen geschnitten werden können, die für zwei Pyramiden den achten Theil des Inhalts der vorigen, also für alle vier Pyramiden den vierten Theil jedes Inhalts zum Inhalt haben und deren Inhalt folglich $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} a^2 h$ ist. So kann man ohne Ende fortfahren, und es ist klar, daß die Summe aller Prismen ohne Ende, den Inhalt der Pyramide genau ausmacht; also ist der Inhalt der Pyramide $a^2 h$ ($\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \ldots\ldots$ ohne Ende) oder gleich $a^2 h \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} \ldots\ldots \text{ ohne Ende}\right)$. Es ist aber $\frac{1}{4-1}$ $= \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} \ldots\ldots$ ohne Ende; also ist der Inhalt der gegebenen Pyramide gleich $a^2 h \cdot \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3} a^2 h$ oder gleich dem dritten Theile eines Prisma, welches die Grundfläche a^2 der Pyramide zur Grundfläche und ihre Höhe h zur Höhe hat.

32.

Folgende andere Methode den Inhalt der Pyramide analytisch zu finden, ist derjenigen Anwendung der Rechnung mit veränderlichen Größen auf Geometrie nachgebildet, die ich in einer kleinen Schrift über diesen Gegenstand, Berlin bei Maurer 1816, vorgetragen habe und die mir einer richtigen Behandlung dieser Rechnung angemessen scheint.

Die Grundfläche der gegebenen Pyramide werde wie oben durch a^2, ihre Höhe durch h, die Entfernung eines beliebigen mit der Grundfläche parallelen Schnitts der Pyramide von ihrer Spitze, durch x, die Entfernung eines zweiten Schnitts unter dem vorigen von diesem, durch k bezeichnet, so ist die Fläche des ersten Schnitts, weil sich die Schnitte wie die Quadrate der Höhen verhalten, $\frac{x^2}{h^2} \cdot a^2$, und die Fläche des zweiten Schnitts $= \frac{(x+k)}{h^2} a^2$. Nun ist, wenn man, wie in Fig. 16., ein äußeres und ein inneres Prisma zwischen den beiden Schnitten bildet, der Inhalt des ersten $= k \frac{(x+k)^2}{h^2} \cdot a^2$, der Inhalt des andern $= k \frac{x^2}{h^2} a^2$. Zwischen beiden liegt der Inhalt der abgekürzten Pyramide zwischen den beiden Schnitten. Es giebt also allemal einen Schnitt zwischen den beiden, dessen Product in die Höhe k, den Inhalt der abgekürzten Pyramide ausdrückt. Die Entfernung dieses Schnitts von dem ersten Schnitte sey $\varkappa$, so kann der Inhalt der abgekürzten Pyramide durch $k \frac{(x+\varkappa)^2}{h^2} a^2$ bezeichnet werden, wo $\varkappa$ eine Linie ist, die allemal zwischen o und k liegt. Um die Form des Ausdrucks für den Inhalt der ganzen Pyramide zu finden, nehme man an, der obere Schnitt rücke hinauf bis in die Spitze, der untere bis in den obern, so ist x = o und k = x, also der Inhalt der Pyramide bis auf den obern Schnitt $= x \cdot \frac{\varkappa^2}{h^2} \cdot a^2$. Da aber $\varkappa$ zwischen o und x liegt und eine

Linie ist, so muß solches nothwendig irgend ein Theil von x seyn, z. B. mx, also muß der Ausdruck des Inhalts der Pyramide bis auf den obern Schnitt, die Form $\frac{mx^3}{h^2} a^2$ haben. Nun ist die obige abgekürzte Pyramide zwischen den beiden Schnitten nichts anders als die Veränderung der ganzen Pyramide von der Spitze an bis auf den obern Schnitt, die entsteht, wenn man $x + k$ statt x setzt und die obere Pyramide davon wiederum abzieht, also ist

$$m \frac{(x + k)^3}{h^2} \cdot a^2 - \frac{mx^3}{h^2} a^2 = k \frac{(x + \varkappa)^2}{h^2} a^2 \text{ oder}$$

$$m (3x^2k + 3xk^2 + k^3) = k (x^2 + 2\varkappa x + \varkappa^2) \text{ oder}$$

$$3x^2m + 3xkm + k^2m = x^2 + 2\varkappa x + \varkappa^2.$$

Die Größe k ist aber willkührlich und also auch $\varkappa$, weil $\varkappa$ zwar möglicherweise auch von x abhängen könnte, aber doch auch nothwendig von k abhängen muß, und also auch willkührlich ist. Also können in der obigen Gleichung k und $\varkappa$ nicht vorkommen, denn sonst würde x davon abhängen. Folglich müssen die Glieder die kein k und $\varkappa$ enthalten für sich gleich seyn. Mithin muß seyn $3x^2m = x^2$ und folglich $m = \frac{1}{3}$. Nun war die Form des Ausdrucks für den Inhalt der Pyramide $\frac{mx^3}{h^2} a^2$, also ist der Ausdruck für den Inhalt $\frac{1}{3} \frac{x^3}{h^2} a^2$. Den ganzen Inhalt der Pyramide erhält man für $x = h$, also ist der Ausdruck desselben $\frac{1}{3} a^2 h$; folglich ist der Inhalt der Pyramide gleich einem Drittheil des Product ihrer Grundfläche in die Höhe. Man sieht, daß dieses Verfahren nichts anders als die Integration eines Differentials ist, allein das Unendlichkleine ist dabei nicht nöthig.

10.

Bemerkungen über die Variations-Rechnung.

233.

In den Aufgaben für die Rechnung mit veränderlichen Größen, oder für die sogenannte Differential- und Integral-Rechnung kommen theils unabhängig- oder willkührlich-veränderliche, theils von jenen abhängende, zusammengesetze Größen vor, und die gesammte Veränderung eines gegebenen Ausdrucks entsteht durch die willkührliche Veränderung der unabhängigen Größen, und durch die Wirkung dieser auf die zusammengesetzten. In der Regel wird den zusammengesetzen Größen, etwa außer der Veränderung, die sie durch die willkührliche Veränderung der unabhängig-veränderlichen Größen, oder der Elemente der Aufgabe erfahren, keine andere Veränderung mehr beigelegt. Es können aber Fälle vorkommen, in welchen sich entweder die zusammengesetzten Größen verändern, während die einfachen Größen oder die Elemente bleiben was sie sind, oder in welchen die zusammengesetzen Größen, außer den Veränderungen die von der Veränderung der Elemente herrühren, noch besondere willkührliche Veränderungen leiden: Fälle also, in welchen den zusammengesetzten Größen Veränderungen beigelegt werden, die nicht, wie gewöhnlich, von der Veränderung der Elemente herrühren. Dergleichen Fälle sind die, in welchen man, nicht so wohl von einem Punkt des Gegenstandes, den ein gegebener Ausdruck bezeichnet, zu einem andern Punkt desselben Gegenstandes, sondern von dem gegebenen Gegenstande zu einem, durch Veränderung aus demselben entstehenden andern fortschreitet, so daß der Gegenstand selbst sich ändert. Wenn z. B. eine Gleichung zwischen $Y = MP$ und $x = AP$ Fig. 18. die krumme Linie BMR bezeichnet und x ist die unabhängig-veränderliche,

y die von x abhängende Größe, so schreitet man in der gegebenen Curve B M R, von M nach einem andern Punkt R, dadurch fort, daß man der willkührlich veränderlichen Größe x irgend eine Veränderung PQ = k beilegt; denn da y von x abhängt, so gehört zu x + k ein anderes y, und zwar dasjenige, welches dem Punkt R entspricht. Hier erfährt die Größe y dadurch eine Veränderung, daß sich x ändert. Veränderte hingegen die Curve BMR ihre Gestalt, und würde etwa zur Curve BNS, auf irgend eine Weise, und nach irgend einem Gesetz; so verändert sich jetzt die Ordinate PM = y ohne daß x irgend zu- oder abnähme, denn zu dem nämlichen AP = x, gehören jetzt zwei verschiedene Ordinaten PM und PN. Dieser Fall mit der Curve ist ein bloßes Beispiel, vielleicht eins der einfachsten, und es kann viele andere Fälle geben, in welchen die zusammengesetzten Größen Veränderungen erfahren, die nicht von der Veränderung der Elemente herrühren. Z. B. Statt der Curve kann sich eine krumme Fläche verändern, oder vielleicht ein Körper, dessen Oberfläche oder Gestalt die in Rechnung kommenden veränderlichen Größen ausdrücken, kann seine Stelle verändern oder sich bewegen, also die Ordinate für einerlei Abcisse verschiedene Punkte bestimmen müssen u. s. w. auf mannigfaltig verschiedene Weise.

Da nun durch die Veränderung des Gegenstandes selbst, die, wie bemerkt, etwas anders, außer dem Resultate der Wechselwirkung der, einen und denselben Gegenstand ausdrückenden veränderlichen Größen liegendes ist, vielerlei Fragen beantwortet werden können, die auf die gewöhnliche Weise weit schwerer oder gar nicht zu lösen sind, so sind Mittel nöthig, dergleichen Veränderungen in Rechnung zu bringen. Z. B. wenn gefragt würde, welche von den verschiedenen, etwa zwischen gegebenen Punkten, oder zwischen andern gegebenen Linien möglichen Curven, diejenige sey, welche diese oder jene Eigenschaft hat, z. B. wenn die Linie gesucht wird, welche die Eigenschaft hat, daß sie zwischen gegebenen Grenzen die möglich kürzeste ist, oder daß ein in derselben sich bewegender schwerer Körper, in der möglichst kürzesten Zeit, von der einen gegebenen Grenze bis zur andern gelangt, oder daß ein Faden,

der die Gestalt der krummen Linie hat, in Ruhe bleibt wenn auf ihn beliebige gegebene Kräfte wirken u. s. w., so entstehen allemal Uebergänge von einer Curve zur andern; denn dadurch, daß man die möglichen Veränderungen der Curve betrachtet, läßt sich diejenige Curve unter den übrigen herausfinden, welche der Aufgabe Genüge thut. Bei allen solchen Aufgaben also kommt es, wie gesagt, darauf an, Veränderungen der zusammengesetzten Größen, die nicht von den Veränderungen der Elemente abhängen, in Rechnung zu bringen.

234.

Man pflegt denjenigen Theil der Rechenkunst, in welchen solche Veränderungen in Betracht gezogen werden, Variations-Rechnung zu nennen. Im Deutschen könnte man ihn Formverwandlungs-Rechnung, oder kürzer Verwandlungs-Rechnung nennen, weil dabei in der That von einer Veränderung der Form der Abhängigkeit der zusammengesetzten Größen die Rede ist. Der Umfang dieser Rechnung ist sehr groß. Lagrange hat sogar die gesammte Mechanik auf die Variations-Rechnung gegründet. Die Verwandlungs-Rechnung ist aber nicht so sehr von der übrigen Rechnung mit veränderlichen Größen, oder der sogenannten Differential- und Integral-Rechnung verschieden, daß sie eben eine eigene neue Rechnung ausmachen dürfte. Sie beruht mit ihr auf einerlei Grund-Idee, nämlich auf Veränderung der Größen, und gehört also ganz in die Rechnung mit veränderlichen Größen. Außer dem in der übrigen Rechnung nicht vorkommenden Haupt-Umstande, daß Veränderungen der zusammengesetzten Größen in Betracht gezogen werden müssen, die nicht von den Veränderungen der Elemente abhängen, bedarf sie weiter keiner neuen Principien, sondern bedient sich, obgleich für jenen Umstand neue Zeichen allerdings bequem sind, ganz der Grundsätze der Differential-Rechnung.

Die Variations-Rechnung ist noch fast nirgend elementar vorgetragen, das heißt so, daß man sich jeden Augenblick, im Fortgange der Untersuchung, eine klare Vorstellung von dem

machen könnte, wovon eben die Rede ist, oder daß die Vorstellungen vom sogenannten Höhern oder gar Unendlichem aus dem Spiele blieben, welche sich leider gern selbst in die Wissenschaft der Wahrheit, in die Mathematik eindrängen möchten. Diese sind aber hier grade am unheimlichsten. Denn ist etwas wirklich wahr, so muß es sich auch so klar und deutlich vortragen lassen, daß es Jedermann begreifen kann, und der Vorwand, daß etwas zu dem sogenannten Höhern gehöre, ist eigentlich immer nur ein Geständniß mangelhafter Klarheit. Ein Gegenstand kann verwickelt seyn, das heißt, es können viele Schlüsse auf einander gebaut werden müssen, ehe man zum Resultat gelangt, welches auch in der Variations-Rechnung der Fall ist, allein durch die Verwickelung wird nie etwas zum Höhern. Das wirklich Höhere liegt in den Elementen, deren erste Prinzipien, bis zur Quelle, allerdings unzugänglich sind, und statt deren vernünftige Axiome Statt gegeben werden müssen, nie aber im Zusammengesetzten; denn ehe sich dieses, wie rückwärts die Elemente, vorwärts im Unendlichen verliert, ist wahrscheinlich der Weg noch weit.

Zwar ist das was Lagrange, der Erfinder der Variations-Rechnung, in der Theorie de fonctions, und besonders in den Leçons, desgleichen Euler, der an der Entwicklung dieses interessanten Theils der Rechenkunst so großen Antheil hat, an manchen Orten vortragen, eben so einfach als klar, und ein herrliches Denkmal des Scharfsinns dieser großen Lehrer; aber eines Theils haben dieselben, besonders Lagrange, nicht eigentlich die Absicht gehabt, ihren Gegenstand Jedem zugänglich zu machen, sondern sie wollten nur Andeutungen für die geben, die ihn schon kennen, andern Theils sind die Schriften dieser Meister in fremden Sprachen verfaßt. Im Deutschen ist die Variations-Rechnung meines Wissens nach wenig bearbeitet. Was ich selbst darüber in dem ersten Bande meines Versuches der Rechnung mit veränderlichen Größen (Göttingen bei Vandenhoek, 1813.) gesagt habe, ist zu weitläuftig und bei aller Ausführlichkeit dennoch nicht klar und bis auf den Grund eindringend, auch konnten daselbst, nach der Bestimmung der Abhandlung, keine Beispiele und Anwen-

dungen gegeben werden. Ich will daher diesen Gegenstand hier noch einmal aufnehmen, und versuchen, denselben noch anschaulicher und deutlicher darzustellen, auch zugleich einige Beispiele und Anwendungen hinzufügen, die vorzüglich zur Erläuterung zu dienen pflegen. Um aber die Abhandlung nicht zu sehr zu verlängern, will ich vorläufig nur bei den Anwendungen in der Geometrie stehen bleiben und die Anwendungen in der Mechanik, durch welche sich besonders Lagrange ein so großes Verdienst erworben hat, für ein andermal aufbehalten.

In einem Lehrbuch müßte die Variations-Rechnung unmittelbar auf die Differential-Rechnung folgen, weil sie die Principien derselben bedarf. Es wird also hier, der Kürze wegen, die Differential- oder Ableitungs-Rechnung in ihrer ganzen Ausdehnung vorausgesetzt, besonders sind die Principien derselben in ihrer ganzen Allgemeinheit nöthig. Diese leztern finden sich, besonders so, wie sie zu dem gegenwärtigen Zweck nöthig sind, in dem vorhin erwähnten ersten Bande meines Versuchs über die Rechnung mit veränderlichen Größen. Dieserhalb und auch wegen der Bezeichnung, die ich aus Ueberzeugung und nach dem davon abermals hier im ersten Bande dieser Abhandlung gegebenen Beweise für die beste halte, muß ich auf jenes Buch verweisen.

I. Mittel, Veränderungen zusammengesetzter Größen auszudrücken, die nicht von den Veränderungen ihrer Elemente herrühren.

235.

Wenn die Veränderung einer zusammengesetzten Größe nicht von ihren Elementen herrührt, gleichwohl aber die Bezeichnung der Abhängigkeit der veränderten Größen nicht aufgegeben werden darf, so kann die Veränderung durch die Elemente allein nicht bezeichnet werden; denn wollte man aus den Elementen eine Größe zusammensetzen, die von der gegebenen abweicht, so würde die ursprüngliche Abhängigkeit aufhören, und die veränderten Größen würden mit den unveränderten gar keinen Zusammenhang haben.

Die

Die Veränderung ist also nur durch neue fremde Größen möglich.

Ohne Zweifel kann solches auf mannigfaltige Weise geschehen. Wäre z. B. y eine, von dem Element x abhängende Größe, so könnte man für das veränderte y setzen $y + \varepsilon$, wo ε irgend eine neue von x abhängende Größe ist, oder $y + k\varepsilon$, wo k eine zweite neue, etwa constante Größe ist, oder $y + \overset{1}{k}\varepsilon + \overset{1}{k}\overset{2}{\varepsilon} \ldots$, wo ε, $\overset{1}{\varepsilon}$, $\overset{2}{\varepsilon} \ldots k \ldots$ lauter neue Größen sind. Der Ausdruck der Veränderung ist aber nicht ganz willkührlich, vielmehr ist:

Erstlich unstreitig die einfachste Beziehung die beste.

Zweitens muß der Ausdruck jeder Veränderung nothwendig von der Art seyn, daß die veränderte Größe in ihren ursprünglichen unveränderten Werth zurückkehrt, sobald man die verändernden Größen gleich Null setzt; denn eben das ist das Mittel, um den Zusammenhang des veränderten neuen Werths der zusammengesetzten Größen mit dem ursprünglichen anzudeuten. Eine Größe die nicht auf die gegebene Größe zurückkäme, wenn man die verändernden Größen Null setzt, oder wieder hinwegnimmt, würde gar nicht aus der gegebenen entstanden seyn, sondern eine völlig andere neue Größe seyn.

Drittens erfordern alle Anwendungen der Rechnung mit veränderlichen Größen eine gewisse bestimmte Form der veränderten Größen, nämlich die, in welcher die willkührlichen oder unabhängigen, einfachen, verändernden Größen nur in Potenzen von ganzen positiven Exponenten vorkommen; denn die Coefficienten dieser Potenzen haben an den Gegenständen auf welche sich die Rechnung bezieht, gewöhnlich bestimmte Bedeutungen und hängen von einander nach bestimmten Regeln ab.

Aus dem ersten Erforderniß folgt, daß man die Veränderung durch so wenig neue Größen als möglich, also wenn es angeht, durch eine einzelne Größe muß hervorzubringen suchen. Das zweite und dritte Erforderniß verlangt, daß die veränderte Größe die bestimmte Gestalt

350. $y + \overset{1}{y}\varkappa + \overset{2}{y}k^{2} + \overset{3}{y}\varkappa^{3} + \overset{4}{y}\varkappa^{4} \ldots$

habe, wo $\varkappa$ die neue verändernde Größe ist, $\overset{1}{y}$, $\overset{2}{y}$, $\overset{3}{y}$, $\overset{4}{y} \ldots$

aber Größen sind die kein $\varkappa$ enthalten, sondern nur von den Elementen allein abhängen; denn in dieser Gestalt kehrt die veränderte Größe nicht allein auf die ursprüngliche y zurück, wenn man $\varkappa = 0$ setzt, sondern $\varkappa$ kommt auch nur in Potenzen von ganzen positiven Exponenten vor.

Diese Bedingungen erfüllt nun folgende Entwickelung.

236.

Es sey wie vorhin, die, z. B. von einer unabhängig veränderlichen Größe x, auf irgend eine Weise abhängende Größe y, gleich fx. Soll diese Größe y eine Veränderung erleiden, ohne daß sich x ändert, so führe man, auf irgend eine beliebige Weise, eine neue Größe $\varkappa$ ein, jedoch so, daß das veränderte y, welches durch $y + \Delta y$ bezeichnet werden mag, auf y zurückkomme sobald man $\varkappa = 0$ setzt. Man mache also auf beliebige Weise aus $y = fx$ die Größe $y + \Delta y = f(x, \varkappa)$. Z. B. wenn $y = \log. x$ wäre, so könnte man für $y + \Delta y$ setzen, etwa $\log. (x + \varkappa^3)$ oder $\log. [x (1 + \varkappa)]$ oder $\log. \frac{x}{1 + \varkappa}$ oder $\log. (x + \sin. \varkappa)$ oder $\log. x \cos. \varkappa$ u. s. w., welche Ausdrücke alle wieder $\log. x$ geben, sobald man $\varkappa = 0$ setzt, und also, obgleich unzählige solche willkührliche Ausdrücke möglich sind, sämmtlich der ersten und zweiten Bedingung entsprechen.

Es kommt nun darauf an, wie die dritte Bedingung zu erfüllen, das heißt, wie $f(x, \varkappa)$ in einem Ausdruck zu entwickeln sey, der $\varkappa$ nur in Potenzen von ganzen positiven Exponenten enthält.

Dieses geht ganz allgemein durch die Ableitungs-Rechnung an. Man verändere nämlich den Werth von $\varkappa$ (denn x soll sich nicht verändern) z. B. um k, so erhält man $f(x, \varkappa + k)$, worin x eine Constante ist. Nun ist bekanntlich nach dem sogenannten taylorschen Lehrsatz

351. $$f[x(\varkappa + k)] = f(x, \varkappa) + k \frac{d}{\varkappa} f(x, \varkappa) + \frac{k^2}{2} \frac{d^2}{\varkappa^2} fx, \varkappa \ldots$$

wo $\frac{d}{\varkappa} f(x, \varkappa)$, $\frac{d^2}{\varkappa^2} f(x, \varkappa)$ u. s. w. Größen sind, die x und

$\varkappa$ enthalten, und die sich nach der Form richten, nach welcher $\varkappa$ in $f(x, \varkappa)$ eingeführt wurde.

Hierin setze man $\varkappa = 0$, so erhält man

$$352. \quad f(x,k) = f(x, 0\varkappa) + k \frac{d}{\varkappa} f(x, 0\varkappa) + \frac{k^2}{2} \frac{d^2}{\varkappa^2} f(x, 0\varkappa) \ldots$$

wenn nämlich durch eine vor das $\varkappa$ gesetzte Null angedeutet wird, daß $\varkappa = 0$ gesetzt werden soll. Endlich mache man das willkührliche k der Größe $\varkappa$ gleich, so erhält man

$$353. \quad fx, \varkappa = f(x, 0\varkappa) + \varkappa \frac{d}{\varkappa} f(x, 0\varkappa) + \frac{\varkappa^2}{2} \frac{d^2}{\varkappa^2} f(x, 0\varkappa) \ldots$$

In diesem Ausdruck enthalten die Größen $f(x, 0\varkappa)$, $\frac{d}{\varkappa} f(x, 0\varkappa)$, $\frac{d}{\varkappa} f(x, 0\varkappa) \ldots$ kein $\varkappa$ mehr, denn diese Größe ist innerhalb derselben gleich Null gesetzt worden. Also kommt in dem Ausdrucke, $\varkappa$ nur in Potenzen von ganzen positiven Exponenten vor, nämlich als Coefficienten zu den eben genannten Größen. Grade so war aber der Ausdruck nöthig, und folglich ist dieser Ausdruck von der Art, wie er für die, ohne Aenderung der Elemente veränderte abhängige Größe, paßt.

Um diese allgemeine Entwickelung durch ein Beispiel noch deutlicher zu machen, sey, wie oben, $y = fx = \log. x$, und $y + \Delta y$ oder $f(x, \varkappa) = \log. (x \cos. \varkappa)$, so ist $\frac{d}{\varkappa} f(x, \varkappa) = \frac{d}{\varkappa} \log. (x \cos. \varkappa)$ $= \frac{d \cos. \varkappa}{\cos. \varkappa} = \frac{\sec. \varkappa}{\cos. \varkappa} = \text{tang.}\, \varkappa$ (denn x ist eine Constante) $\frac{d^2}{\varkappa^2} f(x, \varkappa) = \frac{d}{\varkappa} (\text{tang.}\, \varkappa) = \sec. \varkappa^2$, $\frac{d^3}{\varkappa^3} f(x, \varkappa) = \frac{d}{\varkappa} \sec. \varkappa^2$ $= 2 \sec. \varkappa\, d \sec. \varkappa = 2 \sec. \varkappa\, \text{tang.}\, \varkappa \sec. \varkappa = 2 \sec. \varkappa^2\, \text{tang.}\, \varkappa$, $\frac{d^4}{\varkappa^4} f(x, \varkappa) = d (2 \sec. \varkappa^2\, \text{tang.}\, \varkappa) = 4 \sec. \varkappa^2\, \text{tang.}\, \varkappa^2 + 2 \sec. \varkappa^4$ u. s. w., also ist erstlich, nach der Formel (§. 235.)

$$f(x, \varkappa + k) = \log. x \cos. (\varkappa + k) = \log. x \cos. \varkappa + k\, \text{tang.}\, \varkappa + \frac{k^2}{2} \sec. \varkappa^2 + \frac{k^3}{2.3} . 2 \sec. \varkappa^2\, \text{tang.}\, \varkappa \ldots$$

Setzt man hierin $\varkappa = 0$ so kommt

$$f(x, k) = \log.(x \cos. k) = \log. x + \frac{k^2}{2} + \frac{k^4}{2.3.4} \ldots.$$

Macht man ferner die willkührliche Größe k der Größe $\varkappa$ gleich, so erhält man

$$f(x, \varkappa) = \log.(x \cos. \varkappa) = \log. x + \left(\frac{k^2}{2} + \frac{k^4}{3.4} \ldots\right)$$

welches die verlangte Entwickelung der, ohne Veränderung des Elements, willkührlich veränderten Größe log. x ist, in welcher, wie es seyn soll, $\varkappa$ nur in Potenzen von ganzen positiven Exponenten vorkommt, und welche die Eigenschaft hat, daß daraus wieder, wie es ebenfalls seyn soll, das ursprüngliche log. x wird, sobald man $\varkappa = 0$ setzt.

Der Ausdruck (353) ist also die Grundgestalt, für alle, ohne Veränderung der Elemente entstehende, willkührliche Veränderungen abhängiger Größen.

237.

In dem Ausdruck

$$f(x, \varkappa) = f(x, 0\varkappa) + \varkappa \frac{d}{\varkappa} f(x, 0\varkappa) + \frac{\varkappa^2}{2} \frac{d^2}{\varkappa^2} f(x, 0\varkappa) \ldots$$

in welchem $f(x, \varkappa)$, als abhängig von $\varkappa$ betrachtet, für die übrigen Größen $f(x, 0\varkappa)$, $\frac{d}{\varkappa} f(x, 0\varkappa)$ rc. das ist, was Laplace fonctions génératrices nennt, enthalten die Größen $f(x, 0\varkappa)$ $\frac{d}{\varkappa} f(x, 0\varkappa)$, $\frac{d^2}{\varkappa^2} f(x, 0\varkappa)$ u. s. w., wie gesagt, kein $\varkappa$, weil solches darin $= 0$ gesetzt worden ist, also nur x. Sodann hängen die Größen nach einerlei Art jede von der vorhergehenden ab; denn, um $\frac{d}{\varkappa} f(x, 0\varkappa)$ zu finden, muß, wie aus der obigen Entstehung des Ausdrucks folgt, in $f(x, 0\varkappa)$ das $= 0$ gesetzte $\varkappa$ hergestellt, die erste Ableitung nach $\varkappa$ genommen und in dieser wieder $\varkappa = 0$ gesetzt werden. Genau so muß verfahren werden, wenn $\frac{d^2}{\varkappa^2} f(x, 0\varkappa)$ aus $\frac{d}{\varkappa} f(x, 0\varkappa)$

gefunden werden soll u. s. w. Aus diesen beiden Gründen folgt, daß sich die Größe $\frac{d}{\varkappa}$ f (x, o $\varkappa$) durch irgend ein vor fx gesetztes Zeichen andeuten läßt, um ihre Abstammung von fx oder die oben beschriebene Operation, mittelst welcher sie aus fx oder f (x, o $\varkappa$) gefunden wird, anzuzeigen und daß dann das nämliche Zeichen für die übrigen Größen wiederholt werden muß, weil die Operation wiederholt wird. Man bedient sich zu diesem Zeichen gewöhnlich eines δ, welches allerdings passend ist, weil die Operation, die δ bezeichnen soll, nicht allein der Ableitungs Operation, welche man durch d anzudeuten pflegt, ähnlich ist, sondern sogar davon abhängt. Man kann also

$$354.\quad f(x, \varkappa) = fx + \varkappa\delta fx + \frac{\varkappa^2}{2}\delta^2 fx + \frac{\varkappa^3}{2.3}\delta^3 fx \ldots$$

schreiben, worin die Größen δfx, $\delta^2 fx$, $\delta^3 fx \ldots$ bloß von x, nicht von $\varkappa$ abhängen. Die erste Größe δfx wird, um es zu wiederholen, aus fx gefunden, wenn man in fx, willkührlich eine neue Größe $\varkappa$ einführt, oder, was dasselbe ist, die in der Größe f (x, $\varkappa$) als Null gesetzt zu betrachtende Größe $\varkappa$ wieder herstellt, von der Größe fx, $\varkappa$ die erste Ableitung nach $\varkappa$ nimmt und in dieselbe $\varkappa = o$ setzt. Die zweite Größe $\delta^2 fx$ wird genau eben so aus der ersten dfx gefunden u. s. w. Daher die nothwendige Wiederholung des Zeichens .

Wird fx durch y und f (x, $\varkappa$) wie oben, durch y + Δy bezeichnet, so ist auch

$$355.\quad y + \Delta y = y + \varkappa\delta y + \frac{\varkappa^2}{2}\delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{2.3}\delta^3 y \ldots$$

Gewöhnlich nennt man die Größen δy, $\delta^2 y \ldots$ Variationen von y, allein in so fern das Wort Variation, Veränderung ausdrückt, ist vielmehr Δy die Variation von y. Man verwechselt, vermöge des Begriffs des Unendlich Kleinen, die Coefficienten δy, $\delta^2 y$ mit der gesammten Veränderung Δy, wenn man die Benennung die Δy zukommt den Coefficienten δy, $\delta^2 y \ldots$ beilegt. Sollen dieselben eine nicht deutsche Benennung erhalten, so müßten sie Variations-Coefficienten heißen, eben so wie man dy, d²y... Differential-Coef-

ficienten nennt. Im Deutschen könnte man, wenn dy, d^2y... Ableitungen heißen, δy, $\delta^2 y$... Abformungen, hingegen Δy Verwandlung, und die Operation durch welche beide gefunden werden, Abformungs= oder Verwandlungs=Operation nennen, weil wirklich von einer Verwandlung der Abhängigkeits=Form der zusammengesetzten Größen die Rede ist. Die Wahl der Sprache aus welcher die Ausdrücke genommen werden, steht allerdings in eines Jeden Belieben, nur darf man nicht wohl eine Benennung, welche einem Dinge zukommt einem andern, oder mehreren zugleich geben, weil sonst Verwechselungen entstehen.

Daß hier nicht etwa an das Unendlich=Kleine, auch nur auf das Entfernteste gedacht wird, und $\varkappa$ keinesweges etwa eine sogenannte unendlich=kleine Größe sey, noch viel weniger δy, $\delta^2 y$..., die vielmehr alle recht groß und größer seyn können als x und y selbst, bedarf kaum der Erinnerung.

238.

Bis jetzt ist angenommen, daß die zusammengesetzte Größe y nur von einer unabhängig veränderlichen Größe x abhänge. Es ändert sich nichts, wenn y auch von mehreren Elementen abhinge, weil die Elemente allemal für die Formverwandlung der Größen, Constanten sind. Wäre z. B. z eine Größe, die von mehreren, z. B. zwei unabhängig=veränderlichen Größen x und y abhängt, wie eine der drei Coordinaten einer krummen Fläche, so wäre nach wie vor

$$356.\quad z + \Delta z = z + \varkappa\delta z + \frac{\varkappa^2}{2}\delta^2 z + \frac{\varkappa^3}{2.3}\delta^3 z \ldots$$

Denn die Größen δz, $\delta^2 z$, $\delta^3 z$... richten sich lediglich nach der Art des Hinzutretens der neuen Größe $\varkappa$, und es ist gleichgültig ob z eine oder mehrere unabhängig=veränderliche Größen x und y enthält.

239.

Da die Grundregel für alle Operationen der Ableitungs=Rechnung die ist, daß sich die Ableitungs=Operation für die Ableitungen der höhern Ordnungen wiederholt und das nämliche

bei der Variations-Rechnung Statt findet, so haben die Variations-Rechnung und die Ableitungs- oder Differential-Rechnung im Allgemeinen völlig einerlei Algorithmus. Daraus folgt, daß alle Operationen der Differential-Rechnung, bei welchen es bloß auf die Wiederholung der Ableitungs-Operation ankommt, also alle Operationen, bei welchen noch nicht auf eine bestimmte Abhängigkeit der zusammengesetzten Größen von den Elementen gesehen wird, auch hier unverändert Statt finden. Es ist also hier, weil die Ableitungs-Rechnung vorausgesetzt wird, nicht nöthig, die Wirkung der Verwandlungs-Operation auf alle die verschiedenen, weiter zusammengesetzten Größen, welche Gegenstände der Ableitungs-Rechnung sind, nebst der Rückwirkung auf die einfachen, das Uebertragen der Abhängigkeit auf andere Größen u. dgl. besonders abzuhandeln. Alles was davon die Ableitungs-Rechnung lehrt, gilt auch hier. Man darf nur δ statt d schreiben.

240.

In wie fern etwa aus der Variations-Rechnung, in der Anwendung auch auf Gegenstände der Ableitungs-Rechnung, für die Rechenkunst, oder sonst Vortheil zu ziehen sey, mag dahin gestellt seyn. Statt dessen soll nur insbesondere von solchen Anwendungen die Rede seyn, die der Variations-Operation eigenthümlich angehören. Dieses sind diejenigen, wo auf die gegebenen Größen schon vorher die Ableitungs-Operation angewandt worden ist, und nicht sowohl von den gegebenen Ableitungen, als vielmehr von ihren Stammgrößen (Integralen) Dieses oder Jenes gesucht wird. Wenn z. B. in dem obigen einfachsten Beispiel die Frage wäre: welche unter allen möglichen Linien zwischen zwei bestimmten Punkten die kürzeste sey, so ist nicht der Ausdruck der Länge der gesuchten Linie gegeben, sondern, nächst der Bedingung der Aufgabe, nur der allgemeine Ausdruck der ersten Ableitung der Länge einer beliebigen Linie, welche bekanntlich $\sqrt{(1 + dy^2)}$ ist, und weiter Nichts. Es soll also gefunden werden, für welche Linie die erste Stammgröße von $\sqrt{(1 + dy^2)}$ die möglichst kleinste sey, zwischen gegebenen Grenzen. Hier nun, findet die Va-

riations=Rechnung Anwendung; denn, indem man die Abhängigkeit der Ordinate y von der Abcisse x verwandelt, geht man von einer möglichen Linie zur andern über, und erhält also einen Ausdruck, der auf alle mögliche Linien zwischen den gegebenen Grenzen paßt. Aus der Zahl der möglichen Linien läßt sich dann, wenn man die gegebene Bedingung, daß die Linie die möglichst kleinste seyn soll, in Rechnung bringt, die verlangte Linie heraussuchen. Es kommt also insbesondere auf die Zusammenwirkung der Verwandlungs= und Ableitungs=Operation, oder auf die Ausübung der einen Operation auf Größen an, auf welche die andere schon angewandt worden, und hierüber ist Folgendes zu bemerken.

II. Zusammenwirkung der Verwandlungs= und Ableitungs=Operation.

241.

Gänz allgemein ist die Regel, daß die Ordnung, in welcher die beiden Operationen auf einander folgen völlig gleichgültig ist. Dieses ist für das gesammte Resultat der Operation an sich selbst klar, und läßt sich auch leicht durch ein Beispiel versinnlichen. Denn, wenn sich in der obigen 18ten Figur zuerst die Abhängigkeit der Ordinate PM = y von der Abcisse AP = x, verändert, so geht die Ordinate in NP, also zu dem Punkt N über. Verändert sich darauf der Werth der Abcisse, und hierdurch die Ordinate, so geht die letztere in die Ordinate SQ, oder zu dem Punkt S über. Verändert sich hingegen zuerst der Werth der Abcisse, und hierdurch der Werth der Ordinate PM, so geht solche in die Ordinate QR und folglich zu dem Punkte R über. Verändert sich darauf die Abhängigkeit der Ordinate von der Abcisse, so geht die Ordinate ebenfalls in QS oder zu dem Punkt S über. In beiden Fällen ist also das Resultat das nämliche.

Allein diese Gleichgültigkeit der Folgeordnung der Operationen findet nicht bloß für die gesammten Resultate, sondern

auch für die Coefficienten der einzelnen Glieder der Ausdrücke Statt. Dieses aber muß erst besonders bewiesen werden, denn die Coefficienten kann man einzeln nicht in den, Beispielsweise angenommenen, Figuren sehen.

Es sey also $y = fx$ eine von x abhängende Größe, auf welche beide Operationen, der Form Verwandlung und der Werth-Veränderung (des Variirens und Differentiirens) angewendet, das heißt, in welcher sowohl dem Elemente x eine Werth Veränderung beigelegt, als die Form der Abhängigkeit der Größe y von x verwandelt werden soll.

Aendert sich zuerst der Werth des Elements x, z. B. um k, so geht bekanntlich y in

$$y + Dy = y + kdy + \frac{k^2}{2}d^2y + \frac{k^3}{2.3}d^3y \ldots$$

über. Verwandelt sich nun die Abhängigkeit der Größe y von x z. B. durch die neue Größe $\varkappa$ (wie oben näher auseinandergesetzt ist), so geht vermöge des Obigen, y in

$$y + \Delta y = y + \varkappa\delta y + \frac{\varkappa^2}{2}\delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{2.3}\delta^3 y \ldots$$

über. Dieses letztere muß also in $y + Dy$, überall wo y vorkommt, anstatt y gesetzt werden.

Die Größen dy, d^2y, $d^3y \ldots$ hängen sämmtlich von x ab, also auch von y, weil y von x abhängt, mithin sind sie als Größen zu betrachten, deren nächstes Element y ist, welches dann weiter x zum Element hat. Setzt man daher $y + \Delta y$ statt y, so geht

y in $y + \Delta y$

dy in $dy + \frac{d}{y}dy \cdot \Delta y + \frac{d^2}{y^2}dy \cdot \frac{\Delta y^2}{2} + \frac{d^3}{y^3}dy \cdot \frac{\Delta y^3}{2.3} \ldots$

d^2y in $d^2y + \frac{d}{y}d^2y \cdot \Delta y + \frac{d^2}{y^2}dy^2 \cdot \frac{\Delta y^2}{2} + \frac{d^3}{y^3}d^2y \cdot \frac{\Delta y^3}{2.3} \ldots$

d^3y in $d^3y + \frac{d}{y}d^3y \cdot \Delta y + \frac{d^2}{y^2}d^3y \cdot \frac{\Delta y^2}{2} + \frac{d^3}{y^3}d^3y \cdot \frac{\Delta y^3}{2.3} \ldots$

u. s. w. über.

Also geht $y + Dy$ in

$$y + \Delta y + D(y + \Delta y)$$
$$= y + \Delta y$$
$$+ k\left(dy + \frac{d}{y}dy \cdot \Delta y + \frac{d^2}{y^2}dy \cdot \frac{\Delta y^2}{2} + \frac{d^3}{y^3}dy \cdot \frac{\Delta y^3}{2 \cdot 3} \ldots\right)$$
$$+ \frac{k^2}{2}\left(d^2y + \frac{d}{y}d^2y \cdot \Delta y + \frac{d^2}{y^2}d^2y \cdot \frac{\Delta y^2}{2} \ldots\right)$$
$$+ \frac{k^3}{2 \cdot 3}\left(d^3y + \frac{d}{y}d^3y \cdot \Delta y \ldots\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

über. Setzt man hierin den Werth von Δy, nämlich $\varkappa\delta y + \frac{\varkappa^2}{2}\delta^2 y \ldots$, so erhält man

357. $y + \Delta y + Dy + D\Delta y$

$$= y + \varkappa\delta y + \frac{\varkappa^2}{2}\delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{2.3}\delta^3 y + \frac{\varkappa^4}{2.3.4}\delta^4 y \ldots$$
$$+ kdy + k\varkappa\frac{d}{y}dy\delta y + k\frac{\varkappa^2}{2}\frac{d}{y}dy\delta^2 y + k\frac{\varkappa^3}{2.3}dy\delta^3 y \ldots$$
$$+ k\frac{\varkappa^2}{2}\frac{d^2}{y^2}dy\delta^2 y + k\frac{\varkappa^3}{2}\frac{d^2}{y^2}dy\delta y\delta^2 y \ldots$$
$$+ k\frac{\varkappa^3}{2}\frac{d^3}{3y^3}dy\delta y^3 \ldots$$
$$+ \frac{\varkappa^2}{2}d^2 y + \frac{k^2}{2}\varkappa\frac{d}{y}d^2 y\, y + \frac{k^2}{2}\frac{\varkappa^2}{2}\frac{d}{y}d^2 y\delta^2 y \ldots$$
$$+ \frac{k^2}{2}\frac{\varkappa^2}{2}\frac{d}{y}d^2 y\delta y^2 \ldots$$
$$+ \frac{k^3}{2.3}d^3 y + \frac{k^3}{2.3}\varkappa\frac{d}{y}d^3 y\delta y \ldots$$
$$+ \frac{k^4}{2.3.4}d^4 y \ldots$$

als Resultat der beiden Operationen.

Verwandelt sich dagegen zuerst die Abhängigkeit der Größe y von x, so geht y in

$$y + \Delta y = y + \varkappa\delta y + \frac{\varkappa^2}{2}\delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{2.3}\delta^3 y \ldots$$

über. Verändert sich darauf der Werth von x um k, so geht y in

$$y + Dy = y + kdy + \frac{k^2}{2}d^2y + \frac{k^3}{2.3}d^3y \ldots$$

über. Es muß also nunmehr, überall in $y + \Delta y$, wo y vorkommt, $y + Dy =$ statt y gesetzt werden.

Die Größen δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y \ldots$ hängen sämmtlich von x ab, also auch von y, weil y von x abhängt, mithin sind sie, wie dy, $d^2 y \ldots$ als Größen zu betrachten, deren nächstes Element y ist, welches weiter, x zum Elemente hat. Setzt man daher $y + Dy$ statt y, so geht

y in $y + Dy$

$$\delta y \text{ in } \delta y + \frac{d}{y}\delta y Dy + \frac{d^2}{y^2}\delta y\frac{Dy^2}{2} + \frac{d^3}{y^3}\delta y\frac{Dy^3}{2.3}\ldots$$

$$\delta^2 y \text{ in } \delta^2 y + \frac{d}{y}\delta^2 y Dy + \frac{d^2}{y^2}\delta^2 y\frac{Dy^2}{2} + \frac{d^3}{y^3}\delta^2 y\frac{Dy^3}{2.3}.$$

$$\delta^3 y \text{ in } \delta^3 y + \frac{d}{y}\delta^3 y Dy + \frac{d^2}{y^2}\delta^3 y\frac{Dy^2}{2} + \frac{d^3}{y^3}\delta^2 y\frac{Dy^3}{2.3}\ldots$$

u. s. w. über, also geht $y + \Delta y$ in

$$\begin{aligned} y + Dy + \Delta(y + Dy) \\ = y + Dy \\ + \varkappa\left(\delta y + \frac{d}{y}\delta y Dy + \frac{d^2}{y^2}\delta y\frac{Dy^2}{2} + \frac{d^3}{y^3}\delta y\frac{Dy^3}{2.3}\ldots\right) \\ + \frac{k^2}{2}\left(\delta^2 y + \frac{d}{y}\delta^2 y Dy + \frac{d^2}{y^2}\delta^2 y\frac{Dy^2}{2}\ldots\right) \\ + \frac{\varkappa^3}{2.3}\left(\delta^3 y + \frac{d}{y}\delta^3 y Dy\ldots\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

über. Setzt man hierin den Werth von Dy, nämlich $kdy + \frac{k^2}{2}d^2y\ldots$, so erhält man

358. $$y + {}^{D}y + \Delta y + \Delta{}^{D}y$$

$$= y + k\,dy + \frac{k^2}{2}d^2y + \frac{k^3}{2.3}d^3y + \frac{k^4}{2.3.4}\,d^4y \ldots$$

$$+ \varkappa\delta y + \varkappa k\frac{d}{y}\delta y dy + \varkappa\frac{k^2}{2}\frac{d}{y}\delta y d^2y + \varkappa\frac{k^3}{2.3}\frac{d}{y}\delta y d^3y \ldots$$

$$+ \varkappa\frac{k^2}{2}\frac{d^2}{y^2}\delta y dy^2 + \varkappa\frac{k^3}{2}\frac{d^2}{y^2}\delta y dy \delta^2 y \ldots$$

$$+ \varkappa\frac{k^3}{2.3}\frac{d^3}{y^3}\delta y dy^3 \ldots$$

$$+ \frac{\varkappa^2}{2}\delta^2 y + \frac{\varkappa^2}{2}k\frac{d}{y}\delta^2 y dy + \frac{\varkappa^2}{2}\frac{k^2}{2}\frac{d}{y}\delta^2 y d^2y \ldots$$

$$+ \frac{\varkappa^2}{2}\frac{k^2}{2}\frac{d}{y}\delta^2 y dy^2 \ldots$$

$$+ \frac{\varkappa^3}{2.3}\delta^3 y + \frac{\varkappa^3}{2.3}k\frac{d}{y}\delta^3 y dy \ldots$$

$$+ \frac{\varkappa^4}{2.3.4}\delta^4 y \ldots$$

als das andere Resultat beider Operationen.

Da beide Resultate an Werth gleich sind, so können sie einander gleich gesetzt werden, und da die Größen k und $\varkappa$ willkührlich sind, so müssen auch die Coefficienten zu gleichen Potenzen von k und $\varkappa$ gleich seyn. Daraus folgt

359.
1. $\frac{d}{y}dy\delta y = \frac{d}{y}\delta y dy$ aus den Coefficienten zu $k\varkappa$
2. $\frac{d}{y}dy\delta^2 y + \frac{d^2}{y^2}dy\delta^2 = y\frac{d}{y}\delta^2 y dy$ aus den Coeff. zu $k\varkappa^2$
3. $\frac{d}{y}d^2y\delta y = \frac{d}{y}\delta y d^2y + \frac{d^2}{y^2}\delta y dy^2$ aus den Coeff. zu $\varkappa^2 k^2$
4. $\frac{d}{y}dy\delta^3 y + 3\frac{d^2}{y^2}dy\delta y\delta^2 y + \frac{d^3}{y^3}dy\delta y^3 = \frac{d}{y}\delta^3 y dy$ a.d.Coeff.z.$k\varkappa^3$
5. $\frac{d}{y}d^3y\delta y = \frac{d}{y}\delta y d^3y + 3\frac{d^2}{y^2}\delta y dy d^2y + \frac{d^3}{y^3}\delta y dy^3$ a.d.Coeff.z.$k^3\varkappa$

u. s. w.

Die erste dieser Gleichungen bedeutet nichts anders als

$$\delta dy = d\delta y$$

Denn da dy als eine von y abhängende Größe zu betrachten ist, so muß man, wenn man die Abhängigkeit der Größe y von x verändert, und den Coefficienten der ersten Potenz der veränderten Größe nehmen will, nach den Regeln der Ableitungs-Rechnung $\frac{d}{y} dy \delta y$ schreiben. Hingegen, wenn man die erste Ableitung von δy nehmen will, so muß man, in so fern δy als eine zunächst von y abhängende Größe betrachtet wird, nach denselben Regeln, $\frac{d}{y} \delta y dy$ schreiben; also folgt aus der obigen ersten Gleichung $\frac{d}{y} yd\delta y = \frac{d}{y} \delta ydy$, daß $\delta dy = d\delta y$ sey.

Man darf sich ferner nur der Regeln der Ableitungs-Rechnung erinnern, um ohne Schwierigkeit zu sehen, daß in der zweiten der obigen Gleichungen, der Theil links die vollständige erste Abformung von $\frac{d}{y} dy \delta y$ oder von δdy, also nichts anders als $\delta^2 dy$ ist, mithin folgt aus der zweiten Gleichung, daß

$$\delta^2 dy = d\delta^2 y \text{ ist.}$$

Aus der dritten Gleichung folgt auf gleiche Weise, wie leicht zu sehen,

$$\delta d^2 y = d^2 \delta y$$

Aus der vierten Gleichung folgt

$$\delta^3 dy = d\delta^3 y$$

Aus der fünften Gleichung folgt

$$\delta d^3 y = d^3 \delta y$$

u. s. w., also zusammen

$$360. \begin{cases} \delta dy = d\delta y \\ \delta^2 dy = d\delta^2 y \\ \delta d^2 y = d^2 \delta y \\ \delta^3 dy = d\delta^3 y \\ \delta d^3 y = d^3 \delta y \end{cases}$$

woraus man sieht, daß, eben wie die Folgeordnung der beiden Operationen gleichgültig ist, auch die Zeichen d und δ nach Belieben verwechselt werden können.

Man kann sich diesen Umstand auch daraus leicht erklären, daß sich die Zeichen Δ und δ immer auf y, nie auf Größen die davon abhängen, beziehen, woraus folgt, daß es gleichgültig ist, wohin man die Zeichen schreibt, ob vor oder hinter D und d; denn wenn z. B. δdy gegeben wäre, so heißt dieses nicht, daß die Abhängigkeit der Größe dy von x, verändert werden soll, sondern die Abhängigkeit der Größe y von x soll verändert werden. Folglich ist es gleichgültig, wohin man δ schreibt, wenn man nur damit den Begriff verbindet, daß es sich immer auf y, nie auf etwas anders bezieht.

242.

Ehe weiter zusammengesetzte Größen, nämlich solche, die aus y und dessen Ableitungen dy, $d^2 y$ . . . vielleicht auch noch aus x oder gar aus mehreren abhängigen Größen, nebst ihren Ableitungen und Elementen zusammengesetzt sind, untersucht werden, mag zuerst bei dem obigen einfachsten Fall einer von dem einen Element x abhängigen Größe y, von jener zwiefachen Veränderung die Rede seyn, die der Verwandlungs-Operation eigenthümlich ist, und die aus der Zurückwirkung der Verwandlung auf die Elemente entsteht.

I. Bisher nämlich ist angenommen, daß das Element x unabhängig-veränderlich sey, und daß die Verwandlung der Abhängigkeit der Größe y von x, und die daraus entstehende Werth-Veränderung von y, rückwärts auf x keinen Einfluß haben soll. Dieses ist der Fall, wenn in der obigen Figur die verwandelten Linien alle einerlei Grenzpunkte wie B, Z haben, in welchen man sich z. B. den Anfangs-Punkt der x vorstellen kann. Haben aber die veränderten Linien nicht alle die nämlichen Grenzen, sondern jede eine andere Grenze, oder einen andern Anfangs-Punkt der x, so hat die Verwandlung des Verhältnisses zwischen x und y, das heißt der Uebergang von einer Linie zur nächsten, auch auf x Einfluß, ohne daß sonst x willkührlich seinen Werth veränderte, aber auch ohne daß dadurch die außerdem mögliche willkührliche Werthveränderung von x beschränkt würde. Geht z. B. (Fig. 19.) die Linie AM in die Linie BN über, so kann aus der Ordinate

MP = y, ohne eine willkührliche Veränderung der Abcisse AP = x, die Ordinate NP werden. Aber wenn AB die Grenze der Linien ist, in welcher der Anfangspunkt der Coordinaten angenommen werden mag, so rückt dieser Anfangspunkt von A nach B, und x ist nicht mehr AP, sondern = BC, und y = NC. Also erfährt x eine nothwendige Veränderung, die von der Verwandlung des Verhältnisses zwischen x und y herrührt, und keinesweges willkührlich ist. Dabei kann sich dann aber außerdem x nach Belieben auch noch willkührlich, z. B. um CD verändern, wodurch die ursprüngliche Ordinate PM zuletzt in die Ordinate SD übergeht. Eine solche nothwendige Veränderung von x, außer der willkührlichen, bezieht sich insbesondere auf die Grenzen des Gegenstandes von welchem die Aufgabe handelt, und kommt in Betracht, wenn diese Größen veränderlich sind.

II. Wo also dieses letzte der Fall ist, kann y eine dreifache Veränderung erfahren:

Erstlich eine willkührliche durch die Verwandlung seiner Abhängigkeit von x.

Zweitens eine nothwendige, die von derjenigen Veränderung von x herrührt, welche der Uebergang von einer Form der Abhängigkeit der Größe y von x zur andern, veranlaßt.

Drittens eine andere nothwendige Veränderung, welche von der willkührlichen Veränderung herrührt, zu welcher x außerdem fähig ist. Nothwendig sind diese beiden letzten Veränderungen, weil y allemal eine Größe ist, die von x abhängt, und sich also mit x nothwendig zugleich ändert, ohne Rücksicht auf die Veränderung, die es durch willkührliche Veränderung seiner Abhängigkeit von x erleidet.

III. Es kommt also nun darauf an die Veränderung von x, welche durch die Verwandlung von y veranlaßt wird, in Rechnung zu bringen.

Dieses ist leicht, wenn man erwägt, daß diese Veränderung oder vielmehr Verwandlung von x, obgleich durch die von y veranlaßt, dennoch eben so willkührlich ist, als diese; bloß unter der einzigen Bedingung, daß das verwandelte x

wieder in das ursprüngliche zurückkehrt, wenn man die Größe, durch welche die Verwandlung ausgedrückt wird, gleich o setzt. Denn Alles, was sich auf die neue Linie BNS bezieht, ist willkührlich, also auch der Punkt B, auf welchem sich die Veränderung von x bezieht. Es ist also, um die Verwandlung von x auszudrücken nichts weiter nöthig als das nämliche Mittel, durch welches die Verwandlung von y ausgedrückt wurde. Da aber x noch nicht, wie y, von einem Elemente abhängt, sondern selbst ein unabhängig veränderliches Element ist, so darf man nur willkührlich irgend ein Element, z. B. w annehmen und x davon auf irgend eine Weise abhängen lassen, welches deshalb angeht, weil x unabhängig veränderlich seyn soll, folglich seine Abhängigkeit von einer neuen Größe w, so wie diese neue Größe selbst, willkührlich ist.

x ist also nun für die Formverwandlung nicht mehr ein unabhängiges Element, sondern selbst eine zusammengesetzte Größe. Die durch den Uebergang von einer Curve zur andern, oder was dasselbe ist, durch den Uebergang von einer Abhängigkeits-Form der Größe y von x zur andern, veranlaßte und ebenfalls durch eine Veränderung der Abhängigkeitsform der Größe x von w auszudrückende Veränderung dieser Größe x, ist also, ganz wie die von y,

$$361. \quad \triangle x = \varkappa \delta x + \frac{\varkappa^2}{2} \delta^2 x + \frac{\varkappa^3}{2 \cdot 3} \delta^3 x \ldots$$

wenn man sich nämlich wiederum der Größe $\varkappa$ zur Hervorbringung der Formverwandlung bedient, welches angeht, weil die Größe sowohl als die Art der Formverwandlung willkührlich ist.

IV. Verändert nun außerdem x noch willkührlich seinen Werth, etwa um k, so sind die oben aufgezählten drei Veränderungen von y folgende:

Erstlich die willkührliche, welche aus der Veränderung der Abhängigkeitsform von x entsteht.

Zweitens diejenige, welche daraus entsteht, daß x seinen Werth um $\triangle x = \varkappa \delta x + \frac{\varkappa^2}{2} \delta^2 x \ldots$ verändert.

Drittens, diejenige welche daraus entsteht, daß sich x um k verändert.

Die

Die Wirkung dieser 3 Veränderungen läßt sich dadurch ausdrücken, daß man entweder erst y verwandelt und alsdann $k + \Delta x$ statt x setzt, oder umgekehrt verfährt. Das Resultat ist dasselbe.

V. Es werde also erst y verwandelt, so erhält man

$$y + \Delta y = y + \varkappa\delta y + \frac{\varkappa^2}{2}\delta^2 y + \frac{\varkappa^2}{2\ 3}\delta^3 y \ldots$$

Um desto deutlicher bloß die Wirkung der Form-Verwandlung zu zeigen, mag einstweilen k wegbleiben, und also x bloß um Δx sich veränderen, so geht

$$y \text{ in } y + dy.\Delta x + d^2 y.\frac{\Delta x^2}{2} + d^3 y.\frac{\Delta x^3}{2.3} \ldots$$

$$\delta y \text{ in } \delta y + d\delta y.\Delta x + d^2\delta y.\frac{\Delta x^2}{2} + d^3\delta y\frac{\Delta x^3}{2\ 3} \ldots$$

$$\delta^2 y \text{ in } \delta^2 y + d\delta^2 y.\Delta x + d^2\delta^2 y.\frac{\Delta x^2}{2} + d^3\delta^2 y.\frac{\Delta y^2}{2.3} \ldots$$

u. s. w. über. Substituirt man diese Ausdrücke der veränderten y, δy, $d^2 y \ldots$ in den obigen Ausdruck für $y + \Delta y$, und setzt zugleich den Werth von Δx, so erhält man

$$y + \Delta' y =$$

$$y + dy\left(\varkappa\delta x + \frac{\varkappa^2}{2}\delta^2 x + \frac{\varkappa^2}{2.3}\delta^3 x \ldots\right) + \frac{d^2 y}{2}\left(\varkappa\delta x + \frac{\varkappa^2}{2}\delta^2 x \ldots\right)^2$$

$$+ \frac{d^3 y}{2.3}\left(\varkappa\delta x + \frac{\varkappa^2}{2}\ \delta x \ldots\right)^2 \ldots$$

$$+ \varkappa\left[\delta y + d\delta y\left(\varkappa\delta x + \frac{\varkappa^2}{2}\delta^2 x \ldots\right) + \frac{d^2\delta y}{2}\left(\varkappa\delta x \ldots\right)^2 \ldots\right]$$

$$+ \frac{\varkappa^2}{2}\left[\delta^2 y + d\delta^2 y\left(\varkappa\delta x \ldots\right) \ldots\right]$$

$$+ \frac{\varkappa^3}{2.3}\left(\delta^3 y \ldots\right) \quad \text{oder}$$

362. $y + \Delta' y$

$$= y + \varkappa\ (dy\delta x + \delta y)$$

$$+ \frac{\varkappa^2}{2}\ dy\delta^2 x + d^2 y\delta x^2 + 2d\delta y\delta x + \delta^2 dy)^2$$

$$+ \frac{\varkappa^2}{2.3}(dy\delta^3 x + 3d^2 y\delta x\delta^2 x + d^3 y\delta x^3 + 3d\delta y\delta^2 x$$

$$+ 3d^2\delta y\delta x^2 + 3d\delta^2 y\delta x + \delta^3 y) \ldots$$

VI. In allen diesen Ausdrücken hat δ zweierlei Bedeutungen. Wenn es vor y steht, bezieht es sich auf die Verwandlung der Abhängigkeit der Größe y von x; wenn es vor x steht, auf die Abhängigkeit der Größe x von w. Um diesen Umstand deutlicher auszudrücken und Verwechselungen zu vermeiden, kann man das jedesmalige Element der zusammengesetzten Größe, deren Abhängigkeit von dem Element verwandelt wird, unter dem δ bemerken, auf dieselbe Weise, wie es bei den Ableitungen geschieht, und folglich $\frac{\delta}{x}\,y$ statt δy, $\frac{\delta}{w}\,x$ statt δx schreiben. Dann ist

363. $y + \Delta' y =$

$$y + \varkappa\left(dy\,\frac{\delta}{w}x + \frac{\delta}{w}\,y\right)$$
$$+ \frac{\varkappa^2}{2}\left(dy\,\frac{\delta^2}{w^2}x + d^2y\,\frac{\delta}{w}x^2 + 2d\,\frac{\delta}{x}y\,\frac{\delta}{w}x + \frac{\delta^2}{x^2}y\right)$$
$$+ \frac{\varkappa^3}{2.3}\left(dy\,\frac{\delta^3}{w^3}x + 3d^2y\,\frac{\delta}{w}x\,\frac{\delta^2}{w^2}x + d^3y\,\frac{\delta}{w}x^3 + 3d\frac{\delta}{x}y\,\frac{\delta^2}{w^2}x\right.$$
$$\left. + 3d^2\,\frac{\delta}{x}y\,\frac{\delta}{w}x^2 + 3d\,\frac{\delta^2}{x^2}y\,\frac{\delta}{w}x + \frac{\delta^3}{x^3}y \ldots\right)$$

VII. Die Coefficienten zu $\varkappa^0$, $\varkappa^1$, $\varkappa^2 \ldots$ hängen auch hier nach einerlei Operations-Regel von einander ab; denn aus jedem Coefficienten wird der folgende gefunden, wenn man die ersten Variations-Coefficienten nach x und nach w nimmt, wie es die Aufgabe verlangt, und beide zusammenrechnet. Z. B. von dem ersten Coefficienten y zu $\varkappa^0$ ist der erste Variations-Coefficient nach x, $= \frac{\delta}{x}\,y$ und der erste Variations-Coefficient nach w, $= dy\,\frac{\delta}{w}\,x$ weil y von x abhängt. Beide zusammen geben den zweiten Coefficienten $dy\,\frac{\delta}{w}x + \frac{\delta}{x}y$. Von diesem ist der erste Variations-Coefficient nach x, $= \frac{\delta^2}{x^2}\,y + d\,\frac{\delta}{x}y\,\frac{\delta}{w}\,x$ und derjenige nach w, $= d\,\frac{\delta}{x}\,y\,\frac{\delta}{w}\,x$

$+ d^2y \frac{\delta}{w} x + dy \frac{\delta^2}{w^2} x$. Beides zusammen giebt den dritten Coefficienten

$$dy \frac{\delta^2}{w^2} x + d^2y \frac{\delta}{w} x^2 + 2d \frac{\delta}{x} y \frac{\delta}{w} x + \frac{\delta^2}{x^2} y.$$

Von diesem ist der erste Variations Coefficient nach x

$$= d \frac{\delta}{x} y \frac{\delta^2}{w^2} x + d^2 \frac{\delta}{x} y \frac{\delta}{w} x^2 + 2d \frac{\delta^2}{x^2} y \frac{\delta}{w} x + \frac{\delta^3}{x^3} y,$$

und derjenige nach w,

$$= dy \frac{\delta^3}{w^3} x + d^2y \frac{\delta^2}{w^2} x \frac{\delta}{w} x + 2d^2y \frac{\delta}{w} x \frac{\delta^2}{w^2} x + d^2y \frac{\delta}{w} x^3$$
$$+ 2d^2 \frac{\delta}{x} y \frac{\delta}{w} x^2 + 2d \frac{\delta}{x} y \frac{2}{w^2} x + d \frac{\delta^2}{x^2} y \frac{\delta}{w} x.$$

Beides zusammen giebt den vierten Coefficienten u. s. w.

VIII. Wegen dieser Gleichförmigkeit der Beziehung der Coefficienten auf einander ist man berechtigt, eine Bezeichnung zu wählen, die dieselbe ausdrückt.

Gewöhnlich wird zwar die Gleichförmigkeit der Abhängigkeit stillschweigend angenommen. Allein sie bedurfte des Beweises.

Um also nun die vereinte Wirkung der beiden Form-Veränderungen von y und x, auf die Größe x, auszudrücken, setze man w unter δ und schließe y in Klammern, so ist man berechtigt zu schreiben

$$364.\quad y + \Delta' y = y + \varkappa \frac{\delta}{w}(y) + \frac{\varkappa^2}{2} \frac{\delta^2}{w^2}(y) + \frac{\varkappa^2}{2.3} \frac{\delta^3}{w^3}(y) \ldots$$

weil die Coefficienten zu $\varkappa, \frac{\varkappa^2}{1}, \frac{\varkappa^3}{2.3}$ etc., wie bemerkt, nach einerlei Regel von einander abhängen. Der Werth der Coefficienten ist folgender:

$$365.\quad \begin{cases} \frac{\delta}{w}(y) = dy \frac{\delta}{w} x + \frac{\delta}{x} y \\ \frac{\delta^2}{w^2}(y) = dy \frac{\delta^2}{w^3} x + d^2y \frac{\delta}{w} x^2 + 2d \frac{\delta}{x} y \frac{\delta}{w} x + \frac{\delta^2}{x^2} y \\ \frac{\delta^3}{w^3}(y) = dy \frac{\delta^3}{w^3} x + 3d^2y \frac{\delta}{w} x \frac{\delta^2}{w^2} x + d^3y \frac{\delta}{w} x^3 \\ + 3d \frac{\delta}{x} y \frac{\delta^2}{w^2} x + 3d^2 \frac{\delta}{x} y \frac{\delta}{w} x^2 + 3d \frac{\delta^2}{x^2} y \frac{\delta}{w} x + \frac{\delta^3}{x^3} y \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

IX. Man kann auch noch, wenn man will, die willkührliche Veränderung von x um k in Rechnung bringen. Allein zu dem gegenwärtigen Zweck ist diese Rechnung nicht nöthig.

X. Hinge die zusammengesetzte Größe nicht von einem Element allein, sondern von mehreren ab, wie $z = \varphi(x, y \ldots)$ so könnte jedes dieser Elemente durch die Rückwirkung der Verwandlung von z, außer seiner willkührlichen Veränderung, ebenfalls noch eine besondere Veränderung erleiden. Um das Resultat der Verwandlung von z zu finden, müßte man suchen was aus

$$z + \varkappa \delta z + \frac{\varkappa^2}{2} \delta^2 z \ldots$$

wird, wenn sich innerhalb z, x um $\varkappa \delta x + \frac{\varkappa^2}{2} \delta^2 x \ldots$ y um $\varkappa \delta y + \frac{\varkappa^2}{2} \delta^2 y \ldots\ldots$ u. s. w. verändert. Die Operation ist aber der obigen ähnlich.

III. Anwendung der Verwandlungs-Operation auf Größen, die aus andern abhängigen Größen und deren Ableitungen zusammengesetzt sind.

243.

Der einfachste Fall ist, wenn die gegebene zusammengesetzte Größe, nur eine, von einem Element abhängige Größe mit ihren Ableitungen, und das Element selbst enthält, also von der Form

$$v = f(x, y, dy, d^2 y \ldots)$$

ist, wo y eine von x abhängige Größe bedeutet.

Hier möge zuerst die Veränderung der Zusammensetzungs-Form von y aus x, auf x nicht wirken, sondern nur die Variation von y in Betracht kommen.

Will man in diesem Fall wissen, was aus der Größe v wird, wenn sich die Abhängigkeit der Größe y von x, durch

irgend eine neue Größe $\varkappa$ verändert, das heißt, wenn y in $y + \varkappa\delta y + \frac{\varkappa^2}{2}\delta^2 y \ldots = y + \Delta y$ übergeht, so muß man suchen, was aus dy, d^2y wird, wenn man $y + \Delta y$ statt y setzt. Dieses könnte, von vorne an, wie folgt, gefunden werden, nämlich:

y geht in $y + \Delta y$ über

$$dy \text{ in } dy + \frac{d}{y} dy\, \Delta y + \frac{d^2}{y^2} dy \frac{\Delta y^2}{2} \ldots$$

$$d^2y \text{ in } d^2y + \frac{d}{y} d^2y\, \Delta y + \frac{d^2}{y^2} d^2y \frac{\Delta y^2}{2} \ldots \text{ u. s. w.}$$

oder

$$y \text{ in } y + \varkappa dy + \frac{\varkappa^2}{2} d^2y + \frac{\varkappa^3}{2.3}\delta^3 y \ldots$$

$$dy \text{ in } dy + \frac{d}{y} dy \left(\varkappa\delta y + \frac{\varkappa^2}{2}\delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{2.3}\delta^3 y \ldots\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{d^2}{y^2} dy \left(\varkappa\delta y + \frac{\varkappa^2}{2}\delta^2 y \ldots\right)^2 + \frac{1}{2.3}\frac{d^3}{y^3} dy(\varkappa\delta y \ldots)^2 \ldots$$

$$d^2y \text{ in } d^2y + \frac{d}{y} d^2y \left(\varkappa\delta y + \frac{\varkappa^2}{2}\delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{2.3}\delta^3 y \ldots\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{d^2}{y^2} d^2y \left(\varkappa\delta y + \frac{\varkappa^2}{2}\delta^2 y \ldots\right) + \frac{1}{2.3}\frac{d^3}{y^3} d^2y(\varkappa\delta y \ldots)^3 \text{ etc.}$$

oder

$$dy \text{ in } dy + \varkappa\frac{d}{y} dy\delta y + \frac{\varkappa^2}{2}\left(\frac{d}{y} dy\delta^2 y + \frac{d^2}{y^2} dy\delta y^2\right)$$
$$+ \frac{\varkappa^3}{2.3}\left(\frac{d}{y} dy\delta^3 y + 3\frac{d^2}{y^2} dy\delta y\delta^2 y + \frac{d^3}{y^3} dy\delta y^3\right) \ldots$$

$$d^2y \text{ in } d^2y + \varkappa\frac{d}{y} d^2y\delta y + \frac{\varkappa^2}{2}\left(\frac{d}{y} dy^2\delta^2 y + \frac{d^2}{y^2} d^2y\delta y^2\right)$$
$$+ \frac{\varkappa^3}{2.3}\frac{d}{y} d^2y\delta^3 y + 3\frac{d^2}{y^2} d^2y\delta y\delta^2 y + \frac{d^3}{y^3} d^2y\delta y^3\Big) \ldots$$

u. s. w., oder, weil

$$\frac{d}{y} dy\delta y = \delta dy = d\delta y$$

$$\frac{d}{y} dy\delta^2 y + \frac{d^2}{y^2} dy\delta y^2 = \delta^2 dy = d\delta^2 y$$

$$\frac{d}{y}dy\delta^3y + 3\frac{d^2}{y^2}dy\delta y\delta^2y + \frac{d^3}{y^3}dy\delta y^3 = \delta^3dy = d\delta^3y$$

— — — — — — — —

$$\frac{d}{y}d^2y\delta y = \delta d^2y = d^2\delta y$$

$$\frac{d}{y}d^2y\delta^2y + \frac{d^2}{y^2}d^2y\delta y^2 = \delta^2d^2y = d^2\delta^2y$$

$$\frac{d}{y}d^2y\delta^3y + 3\frac{d^2}{y^2}d^2y\delta y\delta^2y + \frac{d^3}{y^3}d^2y\delta y^3 = \delta^3d^2y = d^2\delta^3y$$

— — — — — — —

ist,

$$365 \left\{ \begin{array}{l} dy \text{ in } dy + \varkappa d\delta y + \frac{\varkappa^2}{2}d\delta^2y + \frac{\varkappa^3}{2.3}d\delta^3y \ldots \\ d^2y \text{ in } d^2y + \varkappa d^2\delta y + \frac{\varkappa^2}{2}d^2\delta^2y + \frac{\varkappa^3}{2.3}d^2\delta^3y \ldots \text{etc.} \end{array} \right.$$

Indessen kann man diese Resultate auch unmittelbar finden, denn da δy, $\delta^2 y$ $\delta^3 y \ldots$ Größen sind, wie y, die von x abhängen, so darf man, um zu erfahren, was aus δy, $\delta^2 y$, $\delta^3 y \ldots$ wird, wenn y in $y + \varkappa\delta y + \frac{\varkappa^2}{2}\delta^2 y \ldots$ übergeht, nur die Ableitungen von $y + \varkappa\delta y + \frac{\varkappa^2}{2}\delta^2 y \ldots$ nehmen, welches giebt

$$dy + \varkappa d\delta y + \frac{\varkappa^2}{2}d\delta^2y + \frac{\varkappa^3}{2.3}d\delta^3y \ldots$$

$$d^2y + \varkappa d^2\delta y + \frac{\varkappa^2}{2}d^2\delta^2y + \frac{\varkappa^3}{2.3}d^2\delta^3y \ldots \text{ u. s. w.}$$

wie oben.

Die Größe $v = f(x, y, dy, d^2y \ldots)$ geht also durch die Veränderung der Abhängigkeit der Größe y von x, in folgende über

$$v + \Delta v = f(x, y + \varkappa\delta y \ldots, dy + \varkappa d\delta y \ldots, d^2y + \varkappa d^2\delta y \ldots);$$

denn das Element x bleibt nach der Voraussetzung ungeändert.

Die Entwickelung dieses Ausdrucks geschieht nach den Regeln der Ableitungs-Rechnung, wenn man die veränderlichen Größen y, dy, $d^2y \ldots$ (x ist jetzt eine Constante) als

eben so viele beliebige, von x abhängige Größen betrachtet, deren Veränderungen der Reihe nach

$$367. \begin{cases} \varkappa\delta y + \frac{\varkappa^2}{2}\delta^2 y \ldots\ldots = \Delta y \\ \varkappa d\delta y + \frac{\varkappa^2}{2} d\delta^2 y \ldots\ldots = d\Delta y \\ \varkappa d^2\delta y + \frac{\varkappa^2}{2} d^2\delta^2 y \ldots\ldots = d^2\Delta y \end{cases}$$

u. s. w. sind.

Dieses giebt

$$v+\Delta v = v + \frac{d}{y} v\,\Delta y + \frac{d}{dy} v\, d\Delta y \ldots + \frac{d}{d^2y} v\, d^2\Delta y \ldots$$
$$+ \frac{d^2}{y^2} v \frac{\Delta y^2}{2} + \frac{d^2}{dy^2} v \frac{d\Delta y^2}{2} \ldots + \frac{d^2}{ydy} v\,\Delta y d\Delta y \ldots$$
$$+ \frac{d^3}{y^3} v \frac{\Delta y^3}{2.3} + \frac{d^2}{dy^3} v \frac{d\Delta y^3}{2.3} \ldots + \frac{d^2}{y^2dy} v \frac{\Delta y^2 d\Delta y}{2} \ldots$$

— — — — — — —

Setzt man hierin die Werthe von Δy, $d\Delta y$, $d^2\Delta y \ldots$ (367.) so ist leicht zu sehen, daß die Coefficienten zu $\varkappa, \frac{\varkappa^2}{2}, \frac{\varkappa^3}{2.3} \ldots$ der Reihe nach folgende sind:

$$368. \begin{cases} \frac{d}{y} v\,\delta y + \frac{d}{dy} v\, d\delta y + \frac{d}{d^2y} v\, d^2\delta y \ldots \\ \frac{d^2}{y^2} v\delta y^2 + \frac{d^2}{y^2} v d\delta y^2 \ldots + 2\frac{d^2}{ydy} v\delta y d\delta y \ldots + \frac{d}{y} v\delta^2 y \\ \qquad + \frac{d}{dy} v d\delta^2 y \ldots \\ \frac{d^3}{y^3} v\,\delta y^3 + \frac{d^3}{y^3} v d\delta y^3 \ldots + 3\frac{d^2}{y^2dy} v\delta y^2 d\delta y + 3\frac{d^2}{ydy^2} v d\delta^2 dy \ldots \\ \qquad + \frac{d}{y} v\delta^3 y + \frac{d}{dy} v\, d\delta^3 y \ldots + \ldots \end{cases}$$

Diese Coefficienten können jeder aus dem Vorhergehenden durch einerlei Operation gefunden werden, und zwar durch die nämliche, welche den ersten Coefficienten aus y giebt. Denn in der That würde man, wenn man v als zusammengesetzt aus y und den davon abhängenden Größen dy, $d^2y \ldots$ be-

trachtete, weil die Operations-Regeln der Variations-Rechnung, mit denen der Ableitungs-Rechnung übereinstimmen, für die erste Variation von v

$$\frac{d}{y} v\delta y + \frac{d}{dy} v \frac{d}{y} dy\delta y + \frac{d}{d^2y} v \frac{d}{y} d^2y\delta y \ldots$$

erhalten, welches nichts anders ist als das obige

$$\frac{d}{y} \cdot \delta y + \frac{d}{dy} v d\delta y + \frac{d}{d^2y} v d^2\delta y \ldots$$

und wenn man die Operation wiederholt, würde man auf die folgenden Coefficienten kommen.

Daraus folgt, daß man für $v + \Delta v$

$$369.\quad v + \Delta v = v + \varkappa\delta v + \frac{\varkappa^2}{2}\delta^2 v + \frac{\varkappa^3}{2.3}\delta^2 v \ldots$$

oder genauer, weil v als eine von x abhängige Größe zu betrachten ist, wie y in (§. 242),

$$370.\quad v + \frac{\Delta}{x}(v) = v + \varkappa\frac{\delta}{x}(v) + \frac{\varkappa^2}{2}\frac{\delta^2}{x^2}(v) + \frac{\varkappa^2}{2.3}\frac{\delta^3}{x^3}(v) \ldots$$

zu schreiben berechtigt ist, worin zufolge (368.)

$$371 \begin{cases} \frac{\delta}{x}(v) = \frac{d}{y} v\delta y + \frac{d}{dy} v d\delta y + \frac{d}{d^2y} v d^2\delta y \ldots \\ \frac{\delta^2}{x^2}(v) = \frac{d^2}{y^2} v\delta y^2 + \frac{d^2}{y^2} v d\delta y^2 \ldots + 2\frac{d^2}{ydy} v\delta y d\delta y \ldots \\ \qquad + \frac{d}{y} vd\delta^2 y + \frac{d}{dy} vd\delta^2 y \ldots \\ \frac{\delta^3}{x^3}(v) = \frac{d^3}{y^3} v\delta y^3 + \frac{d^3}{y^3} v d\delta y^3 \ldots + 3\frac{d^2}{y^2dy} v\delta y^2 d\delta y \\ \qquad + 3\frac{d^2}{ydy^2} v d\delta y^2\delta y \ldots + \frac{d}{y} v\delta^3 y + \frac{d}{dy} v d\delta^3 y \ldots \end{cases}$$

ist.

Gewöhnlich wird dieser Umstand stillschweigend angenommen. Allein es ist besser, ihn wie hier geschehen zu beweisen.

244.

Wirket zugleich die Veränderung der Abhängigkeit der Größe y von x zurück, gleich als änderte sich die Abhängigkeit der Größe x von irgend einer andern Größe w, so kann

man die aus einer solchen doppelten Form-Verwahdlung entstehende Wirkung auf v, auf zweierlei Art berechnen.

Erstlich nämlich kann man zuerst ausmitteln, um wieviel sich y durch die doppelte Form-Verwandlung ändert, welches nach (§. 242) geschiehet. Sodann läßt sich die Veränderung der von x abhängigen Größen dy, $d^2y\ldots$ danach abmessen und der Größe x wird blos noch da, wo sie außer y, dy, $d^2y\ldots$ vorkommt, die ihr eigenthümliche, nicht willkührliche Veränderung $\varkappa\delta x + \frac{\varkappa^2}{2}\delta^2 x\ldots$ beigelegt; oder man kann

Zweitens den Größen y, dy, $d^2y\ldots$ nur wie bisher diejenigen Veränderungen beilegen, welche von der neuen Verwandlung der Abhängigkeit der Größe y von x herrühren, die nothwendige Veränderung von x aber dadurch in Rechnung bringen, daß man sich die gesammte Größe v, wie sie es ist, als aus x zusammengesetzt vorstellt, und also dem x, seine Veränderung $\varkappa\delta x + \frac{\varkappa^2}{2}\delta^2 x\ldots$ nicht allein da, wo es außerhalb y, dy, $d^2y\ldots$ vorkommt, sondern überall, außer- und innerhalb y, dy, $d^2y\ldots$, beilegt.

Das letzte Verfahren ist besser, weil dann nicht allein die vorhin schon ausgemittelte Veränderung, die von der Form-Verwandlung von y herrührt, unverändert bleibt, und nur blos die von der Form-Verwandlung von x herrührende Veränderung hinzukommt, sondern auch die Resultate in dieser Gestalt, wie sich weiter unten zeigen wird, zum Gebrauch geschickter sind. Die erste Art verdient also keine besondere Rücksicht.

Der von x herrührende Theil der Veränderung von v, wird nun gefunden, wenn man v als eine aus x zusammengesetzte Größe betrachtet, und $x + \varkappa\delta x + \frac{\varkappa^2}{2}\delta^2 x\ldots$ statt x setzt. Dieses giebt

$$v+\Delta v=\varphi(x+\Delta x)=v+\frac{d}{x}(v)\Delta x+\frac{d^2}{x^2}(v)\frac{\Delta x^2}{2}+\frac{d^3}{x^3}(v)\frac{\Delta x^3}{2.3}\ldots$$

oder $v + \Delta v = v + \frac{d}{x}(v)\left(\varkappa\delta x + \frac{\varkappa^2}{2}\delta^2 x + \frac{\varkappa^3}{2.3}\delta^3 x \ldots\right)$

$$+ \tfrac{1}{2}\frac{d^2}{x^2}(v)\left(\varkappa\delta x + \frac{\varkappa^2}{2}\delta^2 x \ldots\right)^2 + \frac{1}{2.3}\frac{d^3}{x^3}(v)(\varkappa\delta x \ldots)^3 \ldots$$

oder

372. $v + \Delta v = v + \varkappa\frac{d}{x}(v)\delta x + \frac{\varkappa^2}{2}\left(\frac{d}{x}(v)\delta^2 x + \frac{d^2}{x^2}v\delta x^2\right)$

$$+ \frac{\varkappa^3}{2.3}\left(\frac{d}{x}(v)\delta^3 x + 3\frac{d^2}{x^2}(v)\delta^2 x + \frac{d^3}{x^3}(v)\delta x^3\right) \ldots$$

welches sich auch, weil die Coefficienten alle auf einerlei Weise von einander abhängen, durch

373. $v + \frac{\Delta}{w}(v) = v + x\frac{\delta}{w}v + \frac{\varkappa^2}{2}\frac{\delta^2}{w^2}v + \frac{\varkappa^3}{2.3}\frac{\delta^3}{w^3}v \ldots$

ausdrücken läßt.

Die gesammte Veränderung von v erhält man, wenn man das obige $\frac{\Delta}{x}$ v mit dem gegenwärtigen $\frac{\Delta}{w}$ v zusammennimmt, welches giebt

$$v + \Delta v = v + \varkappa\left(\frac{\delta}{x}v + \frac{\delta}{w}v\right) + \frac{\varkappa^2}{2}\left(v + \frac{\delta^2}{w^2}v\right) \ldots$$

oder auch

374. $v + \Delta v = v + \varkappa\frac{\delta}{w}(v) + \frac{\varkappa^2}{2}\frac{\delta^2}{w^2}(v) + \frac{\varkappa^3}{2.3}\frac{\delta^3}{w^3}(v) \ldots$

wo

375. $$\begin{cases} \frac{\delta}{w}(v) = \frac{d}{x}(v)\frac{\delta}{w}x + \frac{d}{y}v\frac{\delta}{x}y + \frac{d}{dy}vd\frac{\delta}{x}y + \frac{d}{d^2y}vd^2\frac{\delta}{x}y \\ \frac{\delta^2}{w^2}(v) = \frac{d}{x}(v)\frac{\delta^2}{w^2}x + \frac{d^2}{x^2}v\frac{\delta}{w}x^2 \end{cases}$$

$$+ \frac{d^2}{y^2}v\frac{\delta}{x}y^2 + \frac{d^2}{y^2}vd\frac{\delta}{x}y^2 \ldots + 2\frac{d^2}{ydy}v\frac{\delta}{x}yd\frac{\delta}{x}y \ldots$$

$$+ \frac{d}{y}v\frac{\delta^2}{x^2}y + \frac{d}{dy}vd\frac{\delta^2}{x^2}y \ldots$$

Will man, daß sich δ überall auf w beziehe, so muß man hierin die Ausdrücke von $\frac{\delta}{x}y$, $\frac{\delta^2}{x^2}y \ldots$ aus (365.) setzen, nämlich

$$376.\left\{\begin{array}{l}\frac{\delta}{x}y=\frac{\delta}{w}(y)-dy\frac{\delta}{w}x\\ \frac{\delta^2}{x^2}y=\frac{\delta^2}{w^2}(y)-dy\frac{\delta^2}{w^2}x-d^2y\frac{\delta}{w}x^2\end{array}\right.$$

$$-2d\left(\frac{\delta}{w}(y)-dy\frac{\delta}{w}x\right)\frac{\delta}{w}x$$

$$=\frac{\delta^2}{w^2}(y)-dy\frac{\delta^2}{w^2}x-d^2y\frac{\delta}{w}x^2$$

$$-2\frac{\delta}{w}(dy)\frac{\delta}{w}x+2d^2y\frac{\delta}{w}x^2$$

$$=\frac{\delta^2}{w^2}(y)-dy\frac{\delta^2}{w^2}x+d^2y\frac{\delta}{w}x^2-2\frac{\delta}{w}(dy\frac{\delta}{w}x$$

Der Ausdruck des ersten Variations-Coefficienten $\frac{\delta}{w}(v)$ (375.) für die Verwandlung beider Größen y und x wird also aus dem Ausdruck der Variation $\frac{\delta}{x}(v)$ (368.) für den Fall, wenn nur y allein seine Abhängigkeit von x ändert, x aber constant ist, gefunden, wenn man zu $\frac{\delta}{x}(v)$ das Glied $\frac{\delta}{x}(v)\frac{\delta}{w}x$ addirt, und $\frac{\delta}{w}(y)-dy\frac{\delta}{w}x$ statt $\frac{\delta}{x}y$ setzt. Durch ähnliche passende Verwandlungen können der zweite, dritte u. s. w. Variations-Coefficient gefunden werden.

245.

Enthält die Größe v nicht blos eine von x abhängige Größe y mit ihren Ableitungen dy, $d^2y\ldots$, sondern mehrere dergleichen, wie y, dy, $d^2y\ldots$ z, dz, $d^2z\ldots$, so daß

$$v=f(x,y,dy,d^2y\ldots z,dz,d^2z\ldots)$$

wäre, so würden, um die Variation von v zu finden, für jede der abhängigen Größen einzeln, dieselben Rechnungen statt finden, die vorhin für y nöthig waren.

Wäre erstlich x constant, so wäre wie in (43.)

$$v+\frac{\Delta}{x}(v)=v+\varkappa\frac{\delta}{x}(v)+\frac{\varkappa^2}{2}\frac{\delta^2}{x^2}(v)\ldots$$

denn es ist gleichviel, ob eine oder mehrere Größen wie y, z... in v vorkommen. Immer ist v als abhängig von x zu betrachten, weil alle die Größen y, z... von x abhängen sollen.

Ferner ist

$$377. \begin{cases} \frac{\delta}{y}(v) = \frac{d}{y} v\delta y + \frac{d}{dy} v d\delta y + \frac{d}{d^2y} v d^2\delta y \ldots \\ \quad + \frac{d}{z} v\delta z + \frac{d}{dz} v d\delta z + \frac{d}{d^2z} v d^2\delta z \ldots \\ \text{— — — — — — —} \\ \frac{\delta^3}{x^2}(v) = \frac{d^2}{y^2} v\delta y^2 \ldots \\ \quad + \frac{d^2}{z^2} v\delta z^2 \ldots \\ \text{— — — — — — —} \end{cases}$$

u. s. w.

Wäre x nicht constant, sondern veränderlich abhängig von w, so wäre erstlich, wie vorhin

$$v + \frac{\Delta}{w}(v) = v + \varkappa\frac{\delta}{w}(v) + \frac{\varkappa^2}{2}\frac{\delta^2}{w^2}(v) + \frac{\varkappa^3}{2,3}\frac{\delta^3}{w^2}(v) \ldots$$

denn auch hier macht es keinen Unterschied, ob eine oder mehrere von x abhängende Größen vorkommen.

Hingegen die Variations-Coefficienten wären

$$378. \begin{cases} \frac{\delta}{w}(v) = \frac{d}{x}(v)\frac{\delta}{w}x + \frac{d}{y}v\frac{\delta}{x}y + \frac{d}{dy}vd\frac{\delta}{x}y + \frac{d}{d^2y}vd^2\frac{\delta}{x}y \ldots \\ \quad + \frac{d}{z}v\frac{\delta}{x}z + \frac{d}{dz}vd\frac{\delta}{x}z + \frac{d}{d^2z}vd^2\frac{\delta}{x}z \ldots \\ \text{— — — — — — —} \end{cases}$$

u. s. w. Man findet sie aus denen für ein constantes x, in sofern sich δ überall auf w beziehen soll, wenn man, z. B. im ersten Coefficienten $\frac{\delta}{w}(y) - dy\frac{\delta}{w}x$ statt $\frac{\delta}{w}y$, $\frac{\delta}{w}(z) - dz\frac{\delta}{w}x$ statt $\frac{\delta}{x}z$ u. s. w. setzt, und $\frac{\delta}{x}(v)\frac{\delta}{w}x$, welches sich auf alle Größen y, z ... zugleich bezieht, hinzuthut.

246.

Enthält die Größe v, Größen die nicht blos von einem, sondern von mehreren Elementen abhängen, mit ihren theilweisen Ableitungen, wie $z, \frac{d}{x}z, \frac{d}{y}z, \frac{d^2}{x^2}z \ldots$, so daß z. B.

$$v = f\left(x, y, z, \frac{d}{x}z, \frac{d}{y}z, \frac{d^2}{x^2}z, \frac{d^2}{xy}z, \frac{d^2}{y^2}z \ldots\right)$$

und die Elemente sind constant, so darf man nur $z + \varkappa\delta z + \frac{\varkappa^2}{2}\delta^2 z \ldots$ statt z setzen, (§. 238.) um $v + \Delta v$ zu finden. Ohne die Rechnung herzusetzen, ist leicht zu sehen, daß in Δv z. B. der Coefficient zu $\varkappa$, oder der erste Variations-Coefficient folgender ist

$$379.\quad \delta(v) = \frac{d}{z}v\delta z + \frac{d}{d\frac{d}{x}z}v\frac{d}{x}\delta z + \frac{d}{d\frac{d}{y}z}v\frac{d}{y}\delta z + \frac{d}{d\frac{d^2}{x^2}z}v\frac{d^2}{x^2}\delta z + \frac{d}{d\frac{d^2}{xy}z}v\frac{d^2}{xy}\delta z \ldots$$

Wären die Elemente nicht constant, sondern veränderlich abhängig von irgend einer neuen Größe w, so daß x in $x + \varkappa\delta x + \frac{\varkappa^2}{2}\delta^2 x \ldots$, y in $y + \varkappa\delta y + \frac{\varkappa^2}{2}\delta^2 y \ldots\ldots$ überginge, so müßte man, wie leicht einzusehen, zu $\delta(v)$ das Glied $\frac{d}{x}(v)\frac{\delta}{w}x + \frac{d}{y}(v)\frac{\delta}{w}y$ addiren, und weil $\frac{d}{w}(z) = \frac{d}{x}z\frac{\delta}{w}x + \frac{d}{y}z\frac{\delta}{w}x$ seyn würde, $\frac{d}{w}(z) - \frac{d}{x}z\frac{\delta}{w}x - \frac{d}{y}z\frac{\delta}{w}x$ statt δz setzen.

IV. Uebergang von variirten Ableitungen zu variirten Stammgrößen.

247.

Wie oben bemerkt, machen gewöhnlich die unbekannten Stammgrößen zu gegebenen Ableitungen den Gegenstand der Aufgaben aus, zu deren Auflösung die Variations-Rechnung

dient. Also sind die Variations=Coefficienten der unbekannten Stammgrößen nöthig, und es kommt darauf an, aus den Variations=Coefficienten der gegebenen Ableitungen, die in den verschiedenen Fällen nach (§. 243 bis 246.) ausgedrückt werden können, die Variations=Coefficienten der zugehörigen Stammgrößen zu finden, ohne die Stammgrößen selbst zu kennen.

Es sey v eine Größe die von x und von einer oder mehreren aus x zusammengesetzten Größe y, z . . . und deren Ableitungen abhängt, so ist man, weil dem Obigen zufolge, alle Variations Coefficienten nach einerlei Regel von einander abhängen, zu schreiben berechtigt:

$$v + \frac{\Delta}{x}(v) = v + \varkappa\frac{\delta}{x}(v) + \frac{\varkappa^2}{2}\frac{\delta^2}{x^2}(v) + \frac{\varkappa^3}{2.3}\frac{\delta^3}{x^3}(v) \ldots$$

wenn x constant ist und

$$v + \frac{\Delta}{w}(v) = v + \varkappa\frac{\delta}{w}(v) + \frac{\varkappa^2}{2}\frac{\delta^2}{w^2}(v) + \frac{\varkappa^3}{2.3}\frac{\delta^3}{w^3}(v) \ldots$$

wenn die Stammgröße von x keine bestimmte Grenzen hat.

Da v angenommenermaßen Ableitungen bis zu einer gewissen Ordnung enthält, so läßt sich eine Größe u voraussetzen, die die erste Stammgröße von v, das heißt, von welcher die erste Ableitung v ist. Die Größe u kann, wenn sie existirt, die Ableitungen der zusammengesetzten Größen, welche in v vorkommen, nur bis zu einer Ordnung enthalten, die um Eines niedriger ist, als die Ordnung derer, die in v vorkommen.

Zum Beispiel wenn $v = f(x, y, dy, d^2y \ldots d^my)$ wäre, so müßte u eine Größe von der Form $U = F(x, y, dy, d^2y \ldots d^{m-1}y)$ seyn. Die Größe u ist also im Allgemeinen, der Gestalt nach, der Größe v ähnlich. Also muß auch, wenn man die Abhängigkeit der darin vorkommenden zusammengesetzten Größen durch die fremde Größe $\varkappa$ verwandelt, der Ausdruck der entstehenden verwandelten Größe, v ähnlich seyn, das heißt, es muß seyn

$$u + \frac{\Delta}{x}(u) = u + \varkappa\frac{\delta}{x}(u) + \frac{\varkappa^2}{2}\frac{\delta^2}{x^2}(u) + \frac{\varkappa^3}{2.3}\frac{\delta^3}{x^3}(u) \ldots$$

wenn die Grenzen von u bestimmt sind, und

$$u + \frac{\Delta}{w}(u) = u + \varkappa\frac{\delta}{w}(u + \frac{\varkappa^2}{2}\frac{\delta^2}{w^2}(u) + \frac{\varkappa^3}{2.3}\frac{\delta^3}{w^3}(v) \ldots$$

wenn die Grenzen unbestimmt sind.

Nun aber wird vorausgesetzt, daß die Abhängigkeit der zusammengesetzten Größen, wie y von x, verwandelt werden könne, und dennoch die Stammgröße existire; also muß nothwendig die Abhängigkeit der zusammengesetzten Größe von dem Element x willkührlich seyn, und folglich müssen auch eben so wohl, $u + \frac{\Delta}{x}(u)$ und $u + \frac{\Delta}{w}(u)$ die ersten Stammgrößen von $v + \frac{\Delta}{x}(v)$ oder $v + \frac{\Delta}{w}(v)$ seyn, wie u die erste Stammgröße von v ist. Also muß seyn

$$380. \begin{cases} d\left(u + \frac{\Delta}{x}(u)\right) = v + \frac{\Delta}{x}(v) \text{ und} \\ d\left(u + \frac{\Delta}{w}(u)\right) = v + \frac{\Delta}{w}(v) \end{cases}$$

Daraus folgt, wenn man die obigen entwickelten Werthe der verwandelten Größen u und v substituirt,

$$381. \begin{cases} du + \varkappa d\frac{\delta}{x}(u) + \frac{\varkappa^2}{2}d\frac{\delta^2}{x^2}(u) \ldots = v + \varkappa\frac{\delta}{x}(v) \\ \qquad + \frac{\varkappa^2}{2}\frac{\delta^2}{x^2}(v) \ldots \text{ und} \\ du + \varkappa d\frac{\delta}{w}(u) + \frac{\varkappa^2}{2}d\frac{\delta^2}{w^2}(u) \ldots = v + \varkappa\frac{\delta}{w}(v) \\ \qquad + \frac{\varkappa^2}{2}\frac{\delta^2}{w^2}(v) \ldots \end{cases}$$

und weil die Coefficienten zu gleichen Potenzen von $\varkappa$ gleich seyn müssen,

$$382. \begin{cases} d\frac{\delta}{x}(u) = \frac{\delta}{x}(v),\ d\frac{\delta^2}{x^2}(u) = \frac{\delta^2}{x^2}(v) \ldots \\ d\frac{\delta}{w}(u) = \frac{\delta}{w}(v),\ d\frac{\delta^2}{w^2}(u) = \frac{\delta^2}{w^2}(v) \ldots \end{cases}$$

Hieraus folgt, wenn man diese Gleichungen zurückleitet

$$383. \begin{cases} \frac{\delta}{x}(v) = \frac{1}{d}\frac{\delta}{x}(v) + C.., \frac{\delta^2}{x^2}(u) = \frac{1}{d}\frac{\delta^2}{x^2}(v) + C.. \\ \frac{\delta}{w}(u) = \frac{1}{d}\frac{\delta}{w}(v) + C.., \frac{\delta^2}{w^2}(u) = \frac{1}{d}\frac{\delta^2}{w^2}(v) + C.. \end{cases}$$

Daß Stammgrößen zu den Variations-Coefficienten $\frac{\delta}{x}(v)$ .. $\frac{\delta}{w}(v)$ ... möglich sind, ist leicht aus ihren oben entwickelten Ausdrücken zu sehen, denn z. B. in

$$\frac{\delta}{x}(v) = \frac{d}{y}v\frac{\delta}{x}y + \frac{d}{dy}vd\frac{\delta}{x}y + \frac{d}{d^2y}vd^2\frac{\delta}{x}y \ldots \text{ und}$$

$$\frac{\delta}{w}(v) = \frac{d}{y}v\frac{\delta}{x}y + \frac{d}{dy}vd\frac{\delta}{x}y + \frac{d}{d^2y}vd^2\frac{\delta}{x}y \ldots + \frac{d}{x}(v)\frac{\delta}{w}x$$

sind augenscheinlich alle vorkommende Größen als aus x zusammengesetzt zu betrachten, die einzige $\frac{\delta}{w}x$ ausgenommen, die aber, wie sich weiter unten zeigen wird, ebenfalls zurückgeleitet werden kann, weil sie eine vollständige Ableitung ist. Alle übrige Größen enthalten kein w. Stellt man sich also diese Größen wirklich als in x ausgedrückt vor, so sind die gesammten Größen $\frac{\delta}{x}(v)$ und $\frac{\delta}{w}(v)$ nur allein von x abhängig, und es ist bekannt, daß von Größen, die nur von einem Element abhängen, unbedingt Stammgrößen existiren.

Hingen die zusammengesetzten Größen, die von v vorkommen, von mehr als einem Element, z. B. von zweien x und y ab, so daß wie (379.)

$$\delta(v) = \frac{d}{z}v\delta z + \frac{d}{d\frac{d}{x}z}v\frac{d}{x}\delta z + \frac{d}{d\frac{d}{y}z}v\frac{d}{y}\delta z + \frac{d}{d^2\frac{d^2}{x^2}z}v\frac{d^2}{x^2}\delta z + \frac{d}{d^2\frac{d^2}{xy}z}v\frac{d^2}{xy}\delta z \ldots$$

wäre, so sind sämmtliche Größen, die in dieser Entwickelung vorkommen, aus den beiden Elementen x und y zusammenge-

gesetzt. Also läßt sich von $\delta(v)$ eine Stammgröße nach x und y voraussetzen, die, wie sich auf eine der vorigen ähnlichen Weise zeigen läßt, nichts anders, als der erste Variations-Coefficient zu der Stammgröße u von v ist. Also wäre hier

$$385. \quad \delta(u) = \frac{xy}{d^2}\,\delta(v)$$

Es kommt also in allen Fällen nur darauf an, die ersten Stammgrößen zu den ersten Variations Coefficienten zu finden, so erhält man jedesmal unmittelbar die gleichen Variations-Coefficienten zu der Stammgröße u von v, ohne u selbst zu kennen, worin ein wesentlicher Vortheil der Variations-Rechnung besteht.

Die Stammgrößen zu δv lassen sich nun wie folgt finden.

248.

I. Es sey erstlich $v = f(x, y, dy, d^2y \ldots)$ so ist nach (375.)

$$\frac{\delta}{x}(v) = \frac{d}{y}v\,\frac{\delta}{x}y + \frac{d}{dy}v\,d\,\frac{\delta}{x}y + \frac{d}{d^2y}v\,d^2\,\frac{\delta}{x}y\ldots$$

$$\frac{\delta}{w}(v) = \frac{\delta}{x}(v) + \frac{d}{x}(v)\,\frac{\delta}{w}x$$

Man setze der Kürze wegen $\frac{\delta}{y} = \varepsilon$ und $\frac{d}{y}v = p$, $\frac{d}{dy}v = q$, $\frac{d}{d^2x}v = r \ldots$ so ist

$$\frac{\delta}{x}(v) = p\varepsilon + q\,d\varepsilon + r\,d^2\varepsilon + s\,d^3\varepsilon\ldots$$

Nun ist $q\,d\varepsilon = d\,(q\varepsilon) - \varepsilon\,dq$

$$\begin{aligned} r\,d^2\varepsilon &= d\,(r\,d\varepsilon) - d\varepsilon\,dr \\ &= d\,(r\,d\varepsilon) - d\,(\varepsilon\,dr) + \varepsilon\,d^2r \\ s\,d^3\varepsilon &= d\,(s\,d^2\varepsilon) - ds\,d^2\varepsilon \\ &= d\,(s\,d^2\varepsilon) - d\,(ds\,d\varepsilon) + d\varepsilon\,d^2s \\ &= d\,(s\,d^2\varepsilon) - d\,(ds\,d\varepsilon) + d\,(\varepsilon\,d^2s) - \varepsilon\,d^3s \end{aligned}$$

u. s. w., also ist

$$\frac{\delta}{x}(v) = (p - dq + d^2r - d^3s \ldots)\varepsilon$$
$$+ d[(q - dr + d^2s \ldots)\varepsilon$$
$$+ (r - ds \ldots) d\varepsilon$$
$$+ (s - \ldots) d^2\varepsilon \ldots]$$

oder wenn man die Werthe von ε, p, q, r ... setzt,

$$384. \quad \frac{\delta}{x}(v) = \left(\frac{d}{y}v - d\frac{d}{dy}v + d^2\frac{d}{d^2y}v - d^2\frac{d}{d^3y}v \ldots\right)\frac{\delta}{x}y$$
$$+ d\left[\left(\frac{d}{dy}v - d\frac{d}{d^2y}v + d^2\frac{d}{d^3y}v \ldots\right)\frac{\delta}{x}y\right.$$
$$+ \left(\frac{d}{d^2y}v - d\frac{d}{d^3y}v \ldots\right)d\frac{\delta}{x}y$$
$$+ \left(\frac{d}{d^3y}v \ldots\right)d^2\frac{\delta}{x}y$$
$$\left. - - - - \right]$$

Dieser Ausdruck von $\frac{\delta}{x}(v)$ ist bis auf die Größe $\left(\frac{d}{y}v - d\frac{d}{dy}v + d^2\frac{d}{d^2y}v \ldots\right)\frac{\delta}{x}y$ eine vollständige Ableitung, von welcher also die Stammgröße, ohne weitere Bedingung existirt, und durch bloßes Weglassen des d angegeben werden kann. Die Größe $\left(\frac{d}{y}v - d\frac{d}{dy}v + d^2\frac{d}{d^2y}v \ldots\right)\frac{\delta}{x}y$ aber kann nicht anders eine Stammgröße haben, als wenn man dem Coefficienten $\frac{\delta}{x}y$ einen bestimmten Werth giebt. Denn alle die übrigen Größen $\frac{d}{y}v$, $d\frac{d}{dy}v$ u. s. w. hängen von x ab, aber auf eine bestimmte Weise, $\frac{\delta}{x}y$ hängt auch von x ab. Soll also die Stammgröße möglich seyn, so muß die Abhängigkeit der Größe $\frac{\delta}{x}y$ von x bestimmt werden. Nun ist aber die Verwandlung der Abhängigkeit der Größe y von x, und

folglich der Variations-Coefficient $\frac{\delta}{x} y$ unbestimmt, und daß er unbestimmt bleibe, ist eine nothwendige Bedingung der Rechnung. Also ist die Stammgröße $\frac{\delta}{x}(u)$ zu $\frac{\delta}{x}(v)$ nicht anders möglich, als wenn die Größe

$$375.\quad \frac{d}{y} v - d\frac{d}{dy} v + d^2 \frac{d}{d^2 y} v \ldots = 0$$

ist. Diese Gleichung ist die Bedingungs-Gleichung für die Existenz von $\frac{\delta}{x}(u)$. Nachdem solche erfüllt worden, ist Alles was für $\frac{\delta}{x}(v)$ in (384.) übrig bleibt, zusammengenommen eine vollständige Ableitung, von welcher die Stammgröße folgende ist:

$$386.\quad \frac{\delta}{x}(u) = \frac{1}{d}\frac{\delta}{x}(v) = \left(\frac{d}{dy} v - d\frac{d}{d^2 y} v + d^2 \frac{d}{d^3 y} v \ldots\right) \frac{\delta}{x} y + $$
$$+ \left(\frac{d}{d^2 y} v - d\frac{d}{d^3 y} v \ldots\right) d\frac{\delta}{x} y \qquad \text{Const.}$$
$$+ \left(\frac{d}{d^3 y} v \ldots\right) d^2 \frac{\delta}{x} y \ldots$$

— — — —

so daß also der Variations-Coefficient der Stammgröße u von der gegebenen Ableitung v angegeben werden kann, ohne die Stammgröße u selbst zu kennen.

Dieser so eben gefundene Ausdruck der Stammgröße $\frac{\delta}{x}(u)$ zu $\frac{\delta}{x}(v)$ kann noch bestimmter angegeben werden. Jede Stammgröße liegt nämlich nothwendig zwischen gegebenen Grenzen der Elemente, z. B. die Länge einer Linie wird von einem bestimmten Punkt bis zu einem andern gemessen, das heißt, von einer bestimmten Abcisse oder Ordinate, bis zu einer andern, und wenn der Ausdruck von einer Stammgröße $\frac{\delta}{x}(u)$ für den Endpunkt, den Werth $\frac{\delta}{x}\overset{1}{(u)}$, für den An-

fangs-Punkt den Werth $\frac{\delta}{x}(\overset{0}{u})$ hätte, so wäre eigentlich das, was man unter $\frac{\delta}{x}(u)$ versteht, und was wirklich ausgedrückt werden soll, $\frac{\delta}{x}(\overset{1}{u}) - \frac{\delta}{x}(\overset{0}{u})$. Unterscheidet man die Werthe der verschiedenen in $\frac{\delta}{x}(u)$ vorkommenden Größen für den End- und Anfangs-Punkt von dem allgemeinen Ausdruck derselben, ebenfalls durch 1 und 0, so erhält man folgende bestimmtere Ausdrücke für $\frac{\delta}{x}(u)$ oder $\frac{1}{d}\frac{\delta}{x}(v)$

$$387.\quad \frac{1}{d}\frac{\delta}{x}(v) = \frac{\delta}{x}(\overset{1}{u}) - \frac{\delta}{x}(\overset{0}{u}) =$$

$$\left(\frac{d}{dy}\overset{1}{v} - d\frac{d}{d^2y}\overset{1}{v} + d^2\frac{d}{d^3y}\overset{1}{v}\ldots\right)\frac{\delta}{x}\overset{1}{y} + \text{Const.}$$

$$+\left(\frac{d}{d^2y}\overset{1}{v} - d\frac{d}{d^3y}\overset{1}{v}\ldots\right)d\frac{\delta}{x}\overset{1}{y}$$

$$+\left(\frac{d}{d^3y}\overset{1}{v}\ldots\right)d^2\frac{\delta}{x}\overset{1}{y}\ldots$$

$$-\left(\frac{d}{dy}\overset{0}{v} - d\frac{d}{d^2y}\overset{0}{v} + d^2\frac{d}{d^3y}\overset{0}{v}\ldots\right)\frac{\delta}{x}\overset{0}{y}$$

$$+\left(\frac{d}{d^2y}\overset{0}{v} - d\frac{d}{d^3y}\overset{0}{v}\ldots\right)d\frac{\delta}{x}\overset{0}{y}$$

$$-\left(\frac{d}{d^3y}\overset{0}{v}\ldots\right)d^2\frac{\delta}{x}\overset{0}{y}\ldots$$

II. Wäre x als abhängig von w zu betrachten, weil etwa die Veränderung der Abhängigkeit der Größe y von x, auf x, der Grenzen wegen, zurückwirkt, so wäre

$$\frac{\delta}{w}(v) = \frac{\delta}{x}(v) + \frac{d}{x}(v)\frac{\delta}{w}x$$

Der erste Theil dieses Ausdrucks $\frac{\delta}{x}(v)$ ist die nämliche Größe,

von welcher so eben vorhin die Stammgröße gefunden worden. Es kömmt also nur auf den zweiten Theil $\frac{d}{x}(v)\frac{\delta}{w}x$ an. Dieser Theil ist eine vollständige Ableitung, und die Stammgröße von derselben ist $v\frac{\delta}{w}x$. Denn man setze in $v\frac{\delta}{x}x$, $x+k$ statt x, so erhält man

$$\left(v+k\frac{d}{x}(v)+\frac{k^2}{2}\frac{d^2}{k^2}(v)\ldots\right)\frac{\delta}{w}(x+k).$$

Der Coefficient $\frac{\delta}{w}(x+k)$ ist auch $\frac{\delta}{w}x+\frac{\delta}{w}k$. Da aber k eine willkührliche Größe, nämlich die zuläßliche willkührliche Werthveränderung von x ist, so hängt sie gar nicht von w ab, und folglich ist $\frac{\delta}{w}k=0$. Mithin ist das was aus $v\frac{\delta}{w}x$ wird, wenn man darin $x+k$ statt x setzt

$$\left(v+k\frac{d}{x}(v)+\frac{k^2}{2}\frac{d^2}{k^2}(v)\ldots\right)\frac{\delta}{w}x$$

Hierin ist der Coefficient zu k, oder die erste Ableitung der Größe $v\frac{\delta}{w}x$, gleich $\frac{d}{x}(v)\frac{\delta}{w}x$, welches der zweite Theil von $\frac{\delta}{w}(v)$ war. Also ist $\frac{d}{x}(v)\frac{\delta}{w}x$ eine vollständige Ableitung, deren Stammgröße $v\frac{\delta}{w}x$ ist. Die erste Stammmgröße $\frac{\delta}{w}(u)$ von $\frac{\delta}{w}(v)$ ist also $\frac{\delta}{w}(u)=\frac{1}{d}\frac{\delta}{w}(v)=\frac{1}{d}\frac{\delta}{x}(v)+v\frac{\delta}{w}x$ oder vielmehr, wie in (I.) auf die Grenzen bezogen,

$$388.\quad \frac{\delta}{w}(u)=\frac{1}{d}\frac{\delta}{w}(v)=\frac{1}{d}\frac{\delta}{x}(v)+\overset{1}{v}\frac{\delta}{w}\overset{1}{x}-\overset{0}{v}\frac{\delta}{w}\overset{0}{x}$$

wo $\frac{1}{d}\frac{\delta}{x}(v)$ aus (387) genommen werden muß.

Die Bedingungs-Gleichung für die Existenz von $\frac{\delta}{w}(u)$ ist die nämliche wie die (385.) für die Existenz von $\frac{\delta}{x}(u)$, weil der hier hinzukommende zweite Theil $\frac{d}{x}(v)\frac{\delta}{w}x$ keine besondere Bedingungen erfordert, sondern eine vollständige Ableitung ist.

249.

Wäre zweitens $v = f(x, y, dy, d^2y \ldots z, dz, d^2z \ldots)$ so daß innerhalb der gegebenen Ableitung v, mehrere von x abhängige Größen y, z, ... mit ihren Ableitungen vorkämen, so wäre nach (§. 245.)

$$\frac{\delta}{x}(v) = \frac{d}{y}v\frac{\delta}{x}y + \frac{d}{dy}vd\frac{\delta}{x}y + \frac{d}{d^2y}vd^2\frac{\delta}{x}y \ldots$$

$$+ \frac{d}{z}v\frac{\delta}{x}z + \frac{d}{dz}vd\frac{\delta}{x}z + \frac{d}{d^2z}vd^2\frac{\delta}{x}z \ldots$$

— — — — — — —

nach wie vor aber

$$\frac{\delta}{w}(v) = \frac{\delta}{x}(v) + \frac{d}{x}(v)\frac{\delta}{w}x.$$

Da in dem Ausdruck für $\frac{\delta}{x}(v)$ jedesmal das zusammengenommen, was sich einzeln auf y, auf z u. s. w. bezieht, der Form nach, der Größe $\frac{\delta}{x}(v)$ in dem vorigen Fall (§. 248.) gleich ist, wenn v nur eine von x abhängende Größe, z. B. y mit ihren Ableitungen enthält, so kann hier mit jeder einzelnen Zeile von $\frac{\delta}{x}(v)$ geschehen, was in (§. 248.) mit $\frac{d}{x}(v)$ geschah, und es ist klar, daß das Resultat für jede Zeile einzeln dem von (§. 248.) gleich ist, daß also hier

$$389.\quad \frac{1}{d}\frac{\delta}{x}(v) = \frac{\delta}{x}\overset{1}{u} - \frac{\delta}{x}\overset{0}{u} =$$

$$\left(\frac{d}{dy}\overset{1}{v} - d\frac{d}{d^2y}\overset{1}{v} + d^2\frac{d}{d^3y}\overset{1}{v}\dots\right)\frac{\delta}{x}\overset{1}{y} + \text{Const.}$$

$$+\left(\frac{d}{d^2y}\overset{1}{v} - d\frac{d}{d^3y}\overset{1}{v}\dots\right)d\frac{\delta}{x}\overset{1}{y}\dots$$

$$-\left(\frac{d}{dy}\overset{0}{v} - d\frac{d}{d^2y}\overset{0}{v} + d^2\frac{d}{d^3y}\overset{0}{v}\dots\right)\frac{\delta}{x}\overset{0}{y}$$

$$-\left(\frac{d}{d^2y}\overset{0}{v} - d\frac{d}{d^3y}\overset{0}{v}\dots\right)d\frac{\delta}{x}\overset{0}{y}\dots$$

$$+\left(\frac{d}{dz}\overset{1}{v} - d\frac{d}{d^2z}\overset{1}{v} + d^2\frac{d}{d^3z}\overset{1}{v}\dots\right)\frac{\delta}{x}\overset{1}{z} + \text{Const.}$$

$$+\left(\frac{d}{d^2z}\overset{1}{v} - d\frac{d}{d^3z}\overset{1}{v}\dots\right)d\frac{\delta}{x}\overset{1}{z}\dots$$

$$-\left(\frac{d}{dz}\overset{0}{v} - d\frac{d}{d^2z}\overset{0}{v} + d^2\frac{d}{d^3z}\overset{0}{v}\dots\right)\frac{\delta}{x}\overset{0}{z}$$

$$-\left(\frac{d}{d^2z}\overset{0}{v} - d\frac{d}{d^3z}\overset{0}{v}\dots\right)d\frac{\delta}{x}\overset{0}{z}$$

— — — — — — — —

nach wie vor aber

$$390.\quad \frac{\delta}{w}(u) = \frac{1}{d}\frac{\delta}{w}(v) = \frac{1}{d}\frac{}{x}(v) + \overset{1}{v}\frac{\delta}{w}\overset{1}{x} - \overset{0}{v}\frac{\delta}{w}\overset{0}{x}\ \text{ist,}$$

sobald die für die Existenz von $\frac{\delta}{x}(u)$ und $\frac{\delta}{w}(u)$ nöthigen Bedingungs-Gleichungen erfüllt worden sind. Diese Bedingungs-Gleichungen entspringen daraus, daß hier die Größe

$$391\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{d}{y}v - d\frac{d}{dy}v + d^2\frac{d}{d^2y}v\dots\right)\frac{\delta}{x}y\\&+\left(\frac{d}{z}v - d\frac{d}{dz}v + d^2\frac{d}{d^2z}v\dots\right)\frac{\delta}{x}z\end{aligned}\right.$$

— — — — — — —

da sie keine vollständige Ableitung ist, weil $\frac{\delta}{x}y$, $\frac{\delta}{x}z$ willkühr-

lich von x abhängen sollen, wegfallen muß. Sind die Größen $\frac{\delta}{x}y,\ \frac{\delta}{x}z \ldots$ selbst von einander unabhängig, so ist der Coefficient jeder einzelnen Größe gleich Null, welches in diesem Falle folgende Bedingungs-Gleichungen für die Existenz von $\frac{\delta}{x}(u)$ und $\frac{\delta}{w}(u)$ giebt

$$392.\quad \frac{d}{y}v - d\frac{d}{dy}v + d^2\frac{d}{d^2y}v \ldots = 0$$

$$\frac{d}{z}v - d\frac{d}{dz}v + d^2\frac{d}{d^2z}v \ldots = 0$$

— — — — — — —

Sind die Größen $\frac{\delta}{x}y,\ \frac{\delta}{x}z \ldots$ nur zum Theil oder gar nicht von einander unabhängig, sondern Gleichungen, etwa zwischen x, z... und ihren Ableitungen gegeben, aus welchen eine nothwendige Abhängigkeit zwischen $\frac{\delta}{x}y,\ \frac{\delta}{x}z \ldots$ folgt, so kann diese Abhängigkeit am besten auf die Weise in Rechnung gebracht werden, daß man die gegebenen Bestimmungs-Gleichungen auf 0 bringt, jede mit einem willkührlichen Coefficienten multiplicirt, und sie so zu v addirt, wovon das Nähere weiter unten vorkommt.

250.

Enthält v Größen mit ihren Ableitungen, die von mehreren Elementen abhängen, z. B. so daß

$$v = f\left(x, y, z, \frac{d}{x}z, \frac{d}{y}z, \frac{d^2}{x^2}z, \frac{d^2}{xy}z, \frac{d^2}{y^2}z \ldots\right) \text{ so ist}$$

I. nach (379. §. 246.) im Fall die Elemente nicht weiter von w abhängen

$$\delta(v) = \frac{d}{z}v\,\delta z + \frac{d}{\frac{d}{x}z}v\,\frac{d}{x}\delta z + \frac{d}{\frac{d}{y}z}v\,\frac{d}{y}\delta z + \frac{d}{\frac{d^2}{x^2}z}v\,\frac{d^2}{x^2}\delta z$$

$$+ \frac{d}{\frac{d^2}{y^2}z}v\,\frac{d^2}{xy}\delta z \ldots$$

und nach (384. §. 247.)

$$\delta(u) = \frac{xy}{d^2}\,\delta(v).$$

Man setze $\frac{d}{z}\,v = p$

$$\frac{d}{\frac{d}{x}z}\,v = q,\quad \frac{d}{\frac{d}{y}z}\,v = q'$$

$$\frac{d}{\frac{d^2}{x^2}z}\,v = r,\quad \frac{d}{\frac{d}{xy}z}\,v = r',\quad \frac{d}{\frac{d^2}{y^2}z}\,v = r''\ \text{etc.}$$

so ist der obige Ausdruck für $\delta(v)$

$$\delta(v) = p\,\delta z + q\,\frac{d}{x}\,\delta z + r\,\frac{d^2}{x^2}\,\delta z \ldots$$
$$+ q'\,\frac{d}{y}\,\delta z + r'\,\frac{d^2}{xy}\,\delta z \ldots$$
$$+ r''\,\frac{d^2}{y^2}\,\delta z \ldots$$

Nun ist $q\,\frac{d}{x}\,\delta z = \frac{d}{x}\,(q\,\delta z) - \frac{d}{x}\,q\,\delta z$

$$q'\,\frac{d}{y}\,\delta z = \frac{d}{y}\,(q'\,\delta z) - \frac{d}{y}\,q'\,\delta z$$

$$r\,\frac{d^2}{x^2}\,\delta z = \frac{d}{x}\left(r\,\frac{d}{x}\,\delta z - \frac{d}{x}\,r\,\frac{d}{x}\,\delta z\right.$$

$$= \frac{d}{x}\left(r\,\frac{d}{x}\,\delta z\right) - \frac{d}{x}\left(\frac{d}{x}\,r\,\delta z\right) + \frac{d^2}{x^2}\,r\,\delta z$$

$$r'\,\frac{d^2}{xy}\,\delta z = \frac{d}{x}\left(r'\,\frac{d}{y}\,\delta z\right) - \frac{d}{x}\,r'\,\frac{d}{y}\,\delta z = \frac{d}{y}\left(r'\,\frac{d}{x}\,\delta z - \frac{d}{y}\,r'\,\frac{d}{x}\,\delta z\right)$$

$$= \frac{d}{x}\left(r'\,\frac{d}{y}\,\delta z\right) - \frac{d}{y}\left(\frac{d}{x}\,r'\,\delta z\right) + \frac{d^2}{xy}\,r'\,\delta z$$

$$= \frac{d}{y}\left(r'\,\frac{d}{x}\,\delta z\right) - \frac{d}{x}\left(\frac{d}{y}\,r'\,\delta z\right) + \frac{d^2}{xy}\,r'\,\delta z$$

$$r''\,\frac{d^2}{y^2}\,\delta z = \frac{d}{y}\left(r''\,\frac{d}{y}\,\delta z\right) - \frac{d}{y}\,r''\,\frac{d}{y}\,\delta z$$

$$= \frac{d}{y}\left(r''\,\frac{d}{y}\,\delta z\right) - \frac{d}{y}\left(\frac{d}{y}\,r''\,\delta z\right) - \frac{d^2}{y^2}\,r''\,\delta z$$

Substituirt man diese Ausdrücke in δ (v), so erhält man

$$(v) = (p - \frac{d}{x} q - \frac{d}{y} q' + \frac{d^2}{x^2} r + \frac{d^2}{xy} r' + \frac{d^2}{y^2} r'' \ldots) \delta z$$
$$+ \frac{d}{x} (q \delta z + r \frac{d}{x} \delta z - \frac{d}{x} r \delta z + r' \frac{d}{y} \delta z \ldots)$$
$$+ \frac{d}{y} (q' \delta z - \frac{d}{x} r' \delta z + r'' \frac{d}{y} \delta z - \frac{d}{y} r'' \delta z \ldots) \text{ etc.}$$

oder $\delta (v) = (p - \frac{d}{x} q - \frac{d}{y} q' + \frac{d^2}{x^2} r + \frac{d^2}{xy} r' + \frac{d^2}{x^2} r'' \ldots) \delta z$

$$+ \frac{d}{x} (q \delta z + r \frac{d}{x} \delta z - \frac{d}{x} r \delta z - \frac{d}{y} r' \delta z \ldots)$$
$$+ \frac{d}{y} (q' \delta z + r' \frac{d}{x} \delta z - r' \frac{d}{y} \delta z - \frac{d}{y} r'' \delta z \ldots)$$

je nachdem man einen oder den andern Ausdruck für die Größe $r' \frac{d^2}{xy} \delta z$ setzt.

Die Größen p, q, r, q', r', r'', etc. können sämmtlich x, y und z und Ableitungen von z enthalten. Also ist von der ersten Zeile des Ausdrucks von δ (v) keine Stammgröße nach x und y möglich, ohne dem Coefficienten δz einen bestimmten Werth in x und y zu geben. Soll daher δz, das heißt, die Veränderung der Abhängigkeit der Größe z von x und y willkührlich seyn, so ist der Coefficient zu δz nothwendig = o. Also ist

393. $$p - \frac{d}{x} q - \frac{d}{y} q' + \frac{d^2}{x^2} r + \frac{d^2}{xy} r' + \frac{d^2}{y^2} r'' \ldots = 0,$$

welches die Bedingungs-Gleichung für die Existenz von δ (u) ist.

Nachdem die erste Zeile von δ(v) weggefallen ist, bleibt für $\frac{xy}{d^2} \delta (v)$ oder $\delta (u)$ z. B.

$$394.\left\{\begin{array}{l}\delta(u) = \frac{y}{d}\left(q\,\delta z + r\,\frac{d}{x}\,\delta z - \frac{d}{x}\,r\,\delta z + r'\,\frac{d}{y}\,\delta z \ldots\right) \\ \quad + \frac{x}{d}\left(q'\,\delta z - \frac{d}{x}\,r'\,\delta z + r''\,\frac{d}{y}\,\delta z - \frac{d}{y}\,r''\,\delta z \ldots\right) \text{etc.} \\ \text{oder} \\ \delta(u) = \frac{y}{d}\left(q\,\delta z + r\,\frac{d}{x}\,\delta z - \frac{d}{x}\,r\,\delta z - \frac{d}{y}\,r'\,\delta z \ldots\right) \\ \quad + \frac{x}{d}\left(q'\,\delta z + r'\,\frac{d}{x}\,\delta z + r''\,\frac{d}{y}\,\delta z - \frac{d}{y}\,r''\,\delta z \ldots\right) \text{etc.}\end{array}\right.$$

übrig, je nachdem man den einen oder andern Ausdruck für die Größe $r'\frac{d^2}{xy}\,\delta z$ setzt.

Die Größen stehen hier zwar noch unter dem Zurückleitungs-Zeichen, allein δz kann gleichwohl willkührlich seyn, wie es seyn soll, weil sich das Zurückleitungs-Zeichen immer nur auf eine der beiden Größen x und y, von welchen z abhängt, bezieht, und also seine Abhängigkeit von der andern allerdings willkührlich ist.

Der Ausdruck für $\delta(u)$ kann nun wieder wie oben auf Grenzen bezogen werden.

II. Müßten die Elemente noch als abhängig von einer neuen Größe w betrachtet werden, so kommt zufolge (§. 246.) zu dem obigen $\delta(v)$ noch das Glied $\frac{d}{x}(v)\frac{\delta}{w}x + \frac{d}{y}\,v\,\frac{\delta}{w}\,y$ hinzu. Hiervon ist die Stammgröße nach xy

$$395. \quad \frac{y}{d}(v)\frac{\delta}{w}x + \frac{x}{d}(v)\frac{\delta}{w}\,y$$

welches zu dem obigen Ausdruck von $\delta(u)$ hinzukommt.

Uebereinstimmung der Bedingungs-Gleichungen für die Existenz variirter Stammgrößen mit den sogenannten Bedingungs-Gleichungen der Integrabilität.

251.

Bekanntlich sind zuweilen zu Ausdrücken, welche eine oder

mehrere, von einem oder mehreren Elementen abhängige Größen nebst ihren Ableitungen und den Elementen enthalten, Stamm-Größen möglich, ohne daß es nöthig wäre, die Abhängigkeit der zusammengesetzten Größen von den Elementen zu bestimmen; zuweilen hingegen existirt keine Stamm-Größe, wenn man nicht vorher den zusammengesetzten Größen eine bestimmte Abhängigkeit von ihren Elementen beilegt. So z. B. existirt zu $y + xdy$, wenn y von x abhängt, eine Stammgröße, wie auch immer y aus x zusammengesetzt seyn mag. Die Stammgröße ist xy, denn die erste Ableitung von yx ist $y + xdy$, also der gegebenen gleich. Hingegen zu $y - xdy$ existirt nicht für jede beliebige Abhängigkeit der Größe y von x eine Stammgröße. Man muß erst der Größe y eine bestimmte Abhängigkeit von x beilegen, und dadurch die gesammte Größe $y - xdy$ in eine aus x allein zusammengesetzte Größe verwandeln, ehe die Stammgröße zu $y - xdy$ möglich ist.

Das Kennzeichen, ob einer oder der andere Fall statt finde, besteht darin, daß, wenn die Stammgröße für eine beliebige Abhängigkeit der zusammengesetzten Größen existirt, von der gegebenen Ableitung gewisse Bedingungs-Gleichungen erfüllt werden, die im andern Fall nicht zutreffen, und die man deshalb Bedingungs-Gleichungen der Integrabilität zu nennen pflegt, die aber eigentlich Bedingungs-Gleichungen für die Willkühr der Abhängigkeit der zusammengesetzten Größen heißen sollten, weil die Integrabilität, oder die Möglichkeit, die Stammgröße zu berechnen, immer statt findet, wenn nicht für eine unbestimmte, so doch gewiß für eine bestimmte Abhängigkeit der zusammengesetzten Größen, so daß also die Möglichkeit der Stammgrößen keineswegs von jenen Bedingungs-Gleichungen abhängt, wohl aber die Willkühr der Abhängigkeit der zusammengesetzten Größen, die in der Stammgröße vorkommen.

Mit diesen Bedingungs-Gleichungen für die Willkühr der abhängigen Größen stimmen nun genau die Bedingungs-Gleichungen für die Existenz der Variations-Coefficienten der Stammgrößen zu den gegebenen Ableitungen zusammen.

Die Nothwendigkeit dieser Uebereinstimmung folgt aus

der Gleichartigkeit der Operationen, durch welche die Bedingungs-Gleichungen in den beiden Fällen gefunden werden. Um diesen Grund der Uebereinstimmung deutlich zu zeigen, ist es nöthig, die Entstehung der Bedingungs-Gleichungen für die Willkühr der abhängigen Größen in den Stammgrößen, näher nachzuweisen.

252.

I. Es sey zuerst die Ableitung

$$v = p\varepsilon + qd\varepsilon + rd^2\varepsilon + sd^3\varepsilon \ldots$$

gegeben, wo ε irgend eine von dem Elemente x abhängende Größe ist, p, q, r, s... aber kein ε enthalten, wohl aber x, und beliebige andere von x abhängende Größen; so ist, wie in (§. 248. I.)

$$qd\varepsilon = d(q\varepsilon) - \varepsilon dq$$

$$rd^2\varepsilon = d(rd\varepsilon) - d\varepsilon dr$$

$$= d(rd\varepsilon) - d(\varepsilon dr) + \varepsilon d^2r.$$

$$sd^2\varepsilon = d(sd^2\varepsilon) - dsd^2\varepsilon$$

$$= d(sd^2\varepsilon) - d(dsd\varepsilon) + d\varepsilon d^2s$$

$$= d(sd^2\varepsilon) - d(dsd\varepsilon) + d(\varepsilon d^2s) - \varepsilon d^3s$$

u. s. w. Also ist

$$v = (p - dq + d^2r - d^3s \ldots)\varepsilon$$
$$+ d[(q - dr + d^2s \ldots)\varepsilon$$
$$+ (r - ds \ldots) d\varepsilon$$
$$+ (s \ldots) d^2\varepsilon \ldots]$$

Ist in diesem Ausdrucke die Größe $p - dq + d^2r - d^3s \ldots = 0$, so fällt Alles weg, was nicht unter dem Zeichen d steht, und v ist eine vollständige Ableitung, und hat folglich nothwendig eine erste Stammgröße, nämlich die Stammgröße

$$(q - dr + d^2s \ldots)\varepsilon$$
$$+ (r - ds \ldots) d\varepsilon$$
$$+ (s \ldots) d^2\varepsilon \ldots \text{Const.}$$

Die Gleichung

396. $p - dq + d^2r - d^3s \ldots = 0$

ist also in diesem ersten besondern Fall, die Bedingungs-Gleichung für die Willkühr der Abhängigkeit der Größe y von x in der Stammgröße zu v.

II. Nun sey allgemeiner

$$y = f(x, y, dy, d^2y \ldots)$$

Man verändere die Größe y um die Größe ε, die, wie y selbst, auf irgend eine Weise von x abhängt, die Größe y aber nicht. Hat nun die Größe v eine erste Stammgröße für eine willkührliche Abhängigkeit der Größe y von x, so wird sie auch noch eine Stammgröße haben, wenn man $y + \varepsilon$ statt y setzt, x aber unverändert läßt. Denn auf diese Weise wird eben die Abhängigkeit der Größe y von x verändert. Wenn sich nun aber nun y um ε verändert, so ändert sich dy um $d\varepsilon$, d^2y um $d^2\varepsilon$ u. s. w., also geht v in

$$v + \frac{D}{y}(v) = f(x, y + \varepsilon, dy + d\varepsilon, d^2y + d^2\varepsilon \ldots)$$

über.

Diese Größe kann man nach den bekannten Regeln der Ableitungs-Rechnung entwickeln, wenn man y, dy, $d^2y \ldots$ als eben so viele verschiedene veränderliche Größen betrachtet, deren willkührliche Veränderungen ε, $d\varepsilon$, $d^2\varepsilon \ldots$ sind. In der Entwickelung werden die Veränderungen ε, $d\varepsilon$, $d^2\varepsilon \ldots$ theils in einer, theils in zwei, theils in drei u. s. w. Abmessungen vorkommen, nämlich wie folgt

$$v + \frac{D}{y}(v) = v + \frac{d}{y} v.\, \varepsilon + \frac{d}{dy} v.\, d\varepsilon + \frac{d}{d^2y} v.\, d^2\varepsilon \ldots$$
$$+ \frac{d^2}{y^1} v.\, \varepsilon^2 + \frac{d^2}{dy^2} v\, d\varepsilon^2 \ldots + 2\frac{d^2}{ydy} v\varepsilon d\varepsilon \ldots$$
$$+ \frac{d^3}{y^3} v\, \varepsilon^3 \ldots\ldots \text{u. s. w.}$$

Bezeichnet man die Summe der Glieder, die ε, $d\varepsilon$, $d^2\varepsilon \ldots$ nur in einer Abmessung enthalten durch $\overset{1}{v}$, die Summe der Glieder, worin ε, $d\varepsilon$, $d^2\varepsilon \ldots$ in zwei Abmessungen vorkommen, durch $\overset{2}{v}$ u. s. w., so ist

$$v + \frac{D}{y}(v) = v + \overset{1}{v} + \overset{2}{v} + \overset{3}{v} \ldots$$

wo $\overset{1}{v} = \frac{d}{y} v\varepsilon + \frac{d}{dy} vd\varepsilon + \frac{d}{d^2y} vd^2\varepsilon$

$$\overset{2}{v} = \frac{d^2}{y^2} v\varepsilon^2 + \frac{d^2}{dy^2} vd\varepsilon^2 \ldots + \frac{2d^2}{ydy} v\varepsilon d\varepsilon \ldots$$

$$\overset{3}{v} = \frac{d^3}{y^3} v\varepsilon^3 \ldots$$

Nun werde die vorausgesetzte erste Stammgröße von v durch u bezeichnet, so muß u von der Form

$$u = F(x, y, dy, d^2y \ldots)$$

seyn, nämlich von einer ähnlichen Form wie v, nur mit dem Unterschiede, daß die höchste Ableitung von y in u, um einen Grad niedriger ist, als die höchste Ableitung in v. Verändert man also auch innerhalb u die Größe y um ε, während x bleibt, so entsteht eine Größe von der Form

$$u + \frac{D}{y}(u) = u + \overset{1}{u} + \overset{2}{u} + \overset{3}{u} \ldots$$

wo $\overset{1}{u} = \frac{d}{y} u,\varepsilon + \frac{d}{dy} u,d\varepsilon + \frac{d}{d^2y} u,d^2\varepsilon \ldots$

$$\overset{2}{u} = \frac{d^2}{y^2} u,\varepsilon^2 + \frac{d^2}{dy^2} u,d\varepsilon^2 \ldots + 2\frac{d^2}{ydy} u,\varepsilon d\varepsilon \ldots$$

$$\overset{3}{u} = \frac{d^3}{y^3} u,\varepsilon^3 \ldots$$

Diese Größe $u + \frac{D}{y}(u)$ ist die erste Stammgröße zu $v + \frac{D}{y}(v)$. Also ist

$$v + \overset{1}{v} + \overset{2}{v} + \overset{3}{v} \ldots = d(u + \overset{1}{u} + \overset{2}{u} + \overset{3}{u} \ldots) \text{ oder}$$

$$v + \overset{1}{v} + \overset{2}{v} + \overset{3}{v} \ldots = du + d\overset{1}{u} + d\overset{2}{u} + d\overset{3}{u} \ldots$$

Es kann aber nur, eben wie $dn = v$ ist, auch nur einzeln $d\overset{1}{u} = \overset{1}{v}$, $d\overset{2}{u} = \overset{2}{v}$ u. s. w. seyn. Denn da z. B. nur $\overset{2}{u}$ allein die Größen ε, $d\varepsilon \ldots$ in zwei Abmessungen enthält, wie $\overset{2}{v}$, so kann nur, wenn $\overset{2}{u}$ abgeleitet wird, allein $\overset{2}{v}$ entstehen,

nicht v und nicht $\overset{1}{v}$, $\overset{2}{v}$ u. s. w., weil alle diese Größen die Größen ε, $d\varepsilon\ldots$ in andern Abmessungen enthalten. Bezeichnet man nämlich $\frac{d}{y}$ u mit P, $\frac{d}{dy}$ u mit Q, $\frac{d}{d^2y}$ u mit R, $\frac{d^2}{y^2}$ u mit K, $\frac{d^2}{dy^2}$ u mit M, $\frac{d^2}{ydy}$ u mit N 2c. $\frac{d}{y}$ v mit p, $\frac{d}{dy}$ v mit q, $\frac{d}{d^2y}$ v mit r… $\frac{d^2}{y^2}$ v mit k, $\frac{d^2}{dy^2}$ v mit m, $\frac{d^2}{ydy}$ v mit n u. s. w., so ist

$$\overset{1}{v} = p\varepsilon + qd\varepsilon + rd^2\varepsilon\ldots$$

$$\overset{2}{v} = k\varepsilon^2 + md\varepsilon^2\ldots + 2n\varepsilon d\varepsilon\ldots$$

$$\overset{1}{u} = P\varepsilon + Qd\varepsilon + Rd^2\varepsilon\ldots$$

$$\overset{2}{u} = K\varepsilon^2 + Md\varepsilon^2\ldots + 2N\varepsilon d\varepsilon\ldots$$

wo die sämmtlichen Größen p, q, r… k… P, Q, R… K… kein ε, $d\varepsilon\ldots$ enthalten. Nun ist

$$d\overset{1}{u} = Pd\varepsilon + Qd\varepsilon^2 + Rd^3\varepsilon\ldots$$
$$+ \varepsilon dP + d\varepsilon dQ + d^2\varepsilon dR\ldots$$

$$d^2\overset{1}{u} = 2K\varepsilon d\varepsilon + 2Md\varepsilon d^2\varepsilon\ldots + 2Nd\varepsilon^2 + 2N\varepsilon d^2\varepsilon\ldots$$

also enthält $d\overset{1}{u}$ überall ε, $d\varepsilon\ldots$ in einer Abmessung, welches nur mit $\overset{1}{v}$ der Fall ist, $d\overset{1}{u}$ überall ε, $d\varepsilon\ldots$ in zwei Abmessungen, welches nur mit $\overset{2}{v}$ der Fall ist 2c.; folglich kann nur $d\overset{1}{u} = \overset{1}{v}$, $d\overset{2}{u} = \overset{2}{v}$ u. s. w. seyn.

Aus $d\overset{1}{u} = \overset{1}{v}$ folgt $\overset{1}{u} = \frac{1}{d}\overset{1}{v} = \frac{1}{d}\,(p\varepsilon + qd\varepsilon + rd^2\varepsilon\ldots)$

Diese Größe aber ist der in (I.) angenommenen v ganz gleich, folglich existirt die Stammgröße $\overset{1}{u}$ zu $\overset{2}{v}$, ohne daß es nöthig wäre, die Abhängigkeit der Größe y von x zu bestimmen, sobald die Bedingungs-Gleichung (396.)

$$p - dq + d^2r - d^3s\ldots = 0 \text{ oder}$$

$$397.\quad \frac{d}{y}v - d\,\frac{d}{dy}v + d^2\,\frac{d}{d^2y}v - d^3\,\frac{d}{d^3y}v\ldots = 0$$

er-

erfüllt wird. Existirt aber $\overset{1}{u}$, so existiren auch $\overset{2}{u}$, $\overset{3}{u}$... und alle übrigen Glieder von $\frac{D}{y}(u) = \overset{1}{u} + \overset{2}{u} + \overset{3}{u} + \overset{4}{u} \ldots$, weil alle diese Glieder ohne weitere Bedingungen, der Reihe nach, durch bloße Ableitung aus $\overset{1}{u}$ gefunden werden. Also existirt $\frac{D}{y}(u)$ oder

$$F(x + y + \varepsilon, dy + d\varepsilon, d^2y + d^2\varepsilon \ldots) - (x, y, dy, d^2y \ldots)$$

mit willkührlicher Abhängigkeit der Größe y von x, sobald von v die Bedingungs-Gleichung (397.) erfüllt wird. Nun kann man, weil die Größe ε willkührlich ist, $\varepsilon = -y$ setzen. Dadurch geht $\frac{D}{y}(u)$ in

$$Fx - F(x, y, dy, d^2y \ldots) \text{ oder in } Fx - u$$

über. Diese Größe $Fx - u$, als erste Stammgröße mit willkührlicher Abhängigkeit der Größe y von x, zu der Ableitung $fx - v$, existirt also, sobald die Gleichung (397.) erfüllt wird. Für die Existenz des Theils der Stammgröße Fx zu dem Theil fx, ist keine besondere Bedingung nöthig, weil Größen, die nur ein Element allein enthalten, allemal unbedingt eine Stammgröße haben; also bezieht sich die Bedingungs-Gleichung (397.) allein auf den Theil u der Stammgröße $Fx - u$, zu dem Theil v der Ableitung $fx - v$; folglich existirt die Stammgröße u zu der gegebenen Ableitung v, und zwar mit willkührlicher Abhängigkeit der Größe y von x, sobald von v die Gleichung (397.) erfüllt wird.

Die Gleichung

$$\frac{d}{y}v - d\frac{d}{dy}v + d^2\frac{d}{d^2y}v - d^3\frac{d}{d^3y}v \ldots = 0$$

ist also die gesuchte Bedingungs-Gleichung für die Willkühr der abhängigen Größe y in der ersten Stammgröße u zu v.

253.

Diese Bedingungs-Gleichung für die Existenz der ersten Stammgröße u von der Ableitung $v = f(x, y, dy, d^2y \ldots)$ mit willkührlicher Abhängigkeit der Größe y von x, ist nun

genau dieselbe (385.), welche oben für die Existenz des Variations-Coefficienten δu von der Stammgröße u der nämlichen Ableitung v gefunden wurde. Will man die Bedingungs-Gleichungen der Integrabilität für die andern obigen Fälle $v = f(x, y, dy, d^2y \ldots z, dz, d^2z \ldots)$ und $v = (x, y, z, \frac{d}{x} z, \frac{d}{y} z, \frac{d^2}{x^2} z \ldots)$ u. s. w. untersuchen, so wird man finden, daß sie allemal genau mit den Bedingungs-Gleichungen für die Existenz von $\delta u = \frac{1}{d} \delta v$, $\delta u = \frac{xy}{d^2} \delta v$ u. s. w. übereinstimmen.

Diese Uebereinstimmung gründet sich im Allgemeinen darauf, daß nothwendig u selbst, mit willkührlicher Abhängigkeit der zusammengesetzten Größen von den Elementen erst existiren muß, ehe es einen Variations Coefficienten δu von u geben kann, weil die Natur der Größe δu insbesondere die Willkührlichkeit der Abhängigkeit der zusammengesetzten Größen von den Elementen voraussetzt. Angenommen, die Bedingungs-Gleichungen der Integrabilität würden von einem gegebenen v erfüllt, so existirt dessen Stammgröße u für jede beliebige Abhängigkeit der zusammengesetzten Größen von den Elementen. u hätte also alsdann eine bestimmte Form, ohne Rücksicht auf die Abhängigkeit der zusammengesetzten Größen, folglich fänden auch die Abformungen von u unbedingt statt, weil dazu nichts weiter als die Unbestimmtheit der Abhängigkeit der zusammengesetzten Größen von den Elementen nöthig ist, indem alsdann die Abhängigkeit nach Belieben verändert, das heißt die Größen, der Form nach, verwandelt werden können. Die Variations-Coefficienten verlangen alsdann weiter keine Bedingung für die Abhängigkeit der zusammengesetzten Größen von den Elementen, und dürfen nur, wie sie sind, auf die Grenzen von u bezogen werden. Wird die Bedingungs-Gleichung der Integrabilität nicht erfüllt, so müssen die zusammengesetzten Größen diejenige Abhängigkeit von den Elementen erhalten, welche die Bedingungs-Gleichung bestimmt, weil sonst u und folglich δu gar nicht existirt. Da alsdann die Abhängigkeit der zusammengesetzten Größen nicht mehr will

führlich ist, so bezieht sich δu blos auf die Grenzen, wovon das Nähere weiter unten.

Noch deutlicher aber folgt der Grund der Uebereinstimmung der Bedingungs-Gleichungen für die Existenz von u und δu aus der Gleichförmigkeit der Operationen, durch welche die beiden Gleichungen gefunden werden. Denn um die Willkühr der Abhängigkeit der Größe y von x bei der Untersuchung der Bedingungs-Gleichung der Integrabilität auszudrücken, wurde in (§. 252.) die Größe y um eine, von x abhängige Größe ε verändert, während x unverändert blieb. Den Größen dy, d^2y ... wurden die verhältnißmäßigen Veränderungen $d\varepsilon$, $d^2\varepsilon$ ... beigelegt. Bei dem Uebergange von δv zu δu hingegen wurde y um $\varkappa\delta y + \frac{\varkappa^3}{2}\delta^2 y + \frac{\varkappa^3}{2.3}\delta^3 y$ ... verändert, während x ebenfalls unverändert blieb, den Größen dy, d^2y ... wurden ebenfalls verhältnißmäßige Veränderungen beigelegt. Beides kommt im Grunde auf Eins hinaus, denn $\varkappa\delta y + \frac{\varkappa^2}{2}\delta^2 y$ ... ist eben so wohl eine von x abhängende Größe als ε, nur mit dem Unterschiede, der hier im Wesentlichen nichts ändert, daß die Willkührlichkeit der Größe $\varkappa\delta y + \frac{\varkappa^2}{2}\delta^2 y$ ... insbesondere von der Größe $\varkappa$ und ihrem Zutritt zu y herrührt, ε aber keine neue Größe enthält, sondern nur im Allgemeinen als willkührlich abhängig von x angenommen wird. Die Größe $\varkappa\delta y + \frac{\varkappa^2}{2}\delta^2 y$ ... ist nichts anders, als ein entwickeltes ε. Das Resultat von beiden Operationen muß also, in sofern es nur auf die Willkühr der Abhängigkeit der zusammengesetzten Größen ankommt, nothwendig das Nämliche seyn.

Man könnte auf den Gedanken kommen, daß es, weil man mit einer einfachen Größe ε zu der nämlichen Bedingungs-Gleichung gelangt, vielleicht gar nicht nöthig sey, in der Variations-Rechnung eine neue Größe $\varkappa$ einzuführen. Denn in der That kommt Alles nur darauf an, die Willkühr der Abhängigkeit der zusammengesetzten Größen von den Ele-

menten auszudrücken und die Abhängigkeit zu verwandeln, welches wirklich dadurch geschieht, daß man, z. B. wie oben, der Größe y eine Veränderung beilegt, während ihr Element x nicht verändert wird. Wäre diese Vereinfachung möglich, so wäre, wie (§. 252.) zeigt, auch kein neues Zeichen δ nöthig, und zu der ganzen Operation wären die bloßen gewöhnlichen Regeln der Ableitungs- oder Differential-Rechnung ohne Weiteres hinreichend, also wäre es auch nicht nöthig, überhaupt eine neue Rechnungs-Art, wie die Variations-Rechnung, erst aus der Differential-Rechnung abzuleiten. Allein dies geht deshalb nicht an, weil man durch eine, blos allgemein ausgedrückte Veränderung wie ε, keine Entwickelung der zusammengesetzten Größen v und u erhält, die nach Potenzen von ganzen positiven Exponenten der Veränderung ε fortschreitet, sondern eine Reihe, die ε und dessen Ableitungen $d\varepsilon$, $d^2\varepsilon$ . . . enthält, wie (§. 252. II.) zeigt, wo v und u durch die Verwandlung in Reihen von der Form

$$v + \frac{d}{y}(v) = v + \overset{1}{v} + \overset{2}{v} + \overset{3}{v} \ldots$$

$$u + \frac{d}{y}(u) = u + \overset{1}{u} + \overset{2}{u} + \overset{3}{u} \ldots$$

übergehen, deren Glieder $\overset{1}{v}$, $\overset{2}{v}$ . . . $\overset{1}{u}$, $\overset{2}{u}$ . . . keinesweges ε in Potenzen von ganzen positiven Exponenten, sondern zugleich $d\varepsilon$, $d^2\varepsilon$ . . . enthalten. Da nun aber eine Entwickelung, in welcher die willkührlichen Veränderungen nur allein in Potenzen von ganzen positiven Exponenten vorkommen, zu den Anwendungen der Rechnung wesentlich nothwendig ist, weil die gesammte Rechnung mit veränderlichen Größen, in ihrem ganzen Umfange, einzig und allein auf den Ausdruck der veränderten Größen in einer solchen, und keiner andern Form beruht, so müßte man der Größe ε selbst erst eine Form geben, vermöge welcher nicht allein sie selbst, sondern auch ihre Ableitungen sich nach Potenzen der veränderten Größen von ganzen positiven Exponenten ordnen lassen. Grade das thut aber die Variations-Rechnung, denn es geschieht in derselben wirklich nichts anders, als daß $\varepsilon = x\delta y + \frac{x^2}{2}\delta^2 y \ldots$ gesetzt

wird, welches ein Ausdruck ist, der die wirklich verändernde Größe x immer in Potenzen von ganzen positiven Exponenten enthält, und zwar ist es nun nicht mehr nöthig, daß die Coefficienten δy, $\delta^2 y \ldots$ zu den Potenzen von x ebenfalls noch alle willkührlich sind wie x, sondern die Willkühr wird dadurch ausgedrückt, daß man x auf eine unbestimmte Weise in den Ausdruck der Abhängigkeit der zusammengesetzten Größen von den Elementen hinzutreten läßt. Durch die daraus entstehende nothwendige Abhängigkeit der Coefficienten δy, $\delta^2 y \ldots$ von einander, die der Abhängigkeit der Ableitungs Coefficienten von einander ähnlich ist, gewinnt man aber den großen Vortheil, daß der gesammte Algorithmus der Ableitungs-Rechnung nunmehr auf die Ausdrücke, die durch eine solche Gestalt der Größe s hervorgebracht werden, paßt.

Die Variations Rechnung setzt also, wie oben gesagt, in der That keinesweges irgend ein neues Princip, oder eine neue Grund-Idee voraus, sondern ist ganz und gar auf die gewöhnliche Ableitungs- oder Differential-Rechnung gebaut. Sie bedient sich nur des Kunstgriffs, die Willkühr der Abhängigkeit der zusammengesetzten Größen von den Elementen, so auszudrücken, daß Entwickelungen entstehen, in welchen, unter allen Umständen, die willkührlichen unveränderten Größen nur in Potenzen von ganzen positiven Exponenten erscheinen, und das Zeichen δ bedeutet also nichts Eigenthümliches, weil die Werthe der Größen, die dadurch bezeichnet werden, allemal durch die Ableitungs-Operation gefunden werden können.

VI. Bedeutung der Resultate der Verwandlungs-Operation.

254.

Man setze der Kürze wegen die Reihen, welche in den obigen Resultaten der Form-Verwandlungs-Operation vorkommen, einzelnen Buchstaben gleich, z. B.

$$398 \begin{cases} \frac{d}{y} v - d \frac{d}{dy} v + d^2 \frac{d}{d^2y} v - d^3 \frac{d}{d^3y} v \ldots = Y \\ \frac{d}{dy} v - d \frac{d}{d^2y} v + d^2 \frac{d}{d^3y} v \ldots = Y_1 \\ \frac{d}{d^2y} v + d \frac{d}{d^3y} v \ldots = Y_2 \end{cases}$$

u. s. w. die ähnlichen auf z sich beziehenden Größen gleich Z, Z_1, $Z_2 \ldots$; sodann

$$399 \begin{cases} \frac{d}{z} v - \frac{d}{x} \frac{d}{d \frac{}{x} z} v + \frac{d}{y} \frac{d}{d \frac{}{y} z} v + \frac{d^2}{x^2} \cdot \frac{d}{d^2 \frac{}{x^2} z} v \ldots = (Z) \\ \frac{d}{d \frac{}{x} z} v \delta z + \frac{d}{d^2 \frac{}{x^2} z} v \frac{d}{x} \delta z \ldots\ldots\ldots = (Z_1) \\ \frac{d}{d \frac{}{y} z} v \delta z - \frac{d}{x} \frac{d}{d^2 \frac{}{xy} z} z \delta z \ldots\ldots\ldots = (Z_2) \end{cases}$$

u. s. w., so ist

Erstlich, im Fall $v = f(x, y, dy, d^2y \ldots)$ ist, und die Stammgröße zu v heißt u, die Bedingungs-Gleichung für die Existenz von δu, zufolge (§. 248.), das Element x mag von w abhängen oder nicht,

$$400. \quad Y = 0$$

und nachdem diese erfüllt worden, ist

$$401. \quad \delta u = \overset{1}{Y}_1 \frac{\delta}{x} \overset{1}{y} + \overset{2}{Y}_2 d \frac{\delta}{x} \overset{1}{y} \ldots - \overset{0}{Y}_1 \frac{\delta}{x} \overset{0}{y} - \overset{0}{Y}_2 d \frac{\delta}{x} \overset{0}{y} \ldots$$

wozu noch die Größe $\overset{1}{v} \frac{\delta}{w} \overset{1}{x} - \overset{0}{v} \frac{\delta}{w} \overset{0}{x}$ hinzukommt, wenn x von w abhängt.

Zweitens wenn $v = f(x, y, dy, d^2y \ldots z, dz, d^2z \ldots)$, so ist die Bedingungs-Gleichung für die Existenz von δu, das Element x mag von w abhängen oder nicht,

$$402. \quad Y \frac{\delta}{x} y + Z \frac{\delta}{x} z \ldots = 0 \ (391.)$$

und nachdem diese erfüllt worden, ist

403. $\delta u = \overset{1}{Y}_1 \frac{\delta}{x} \overset{1}{y} + \overset{1}{Y}_2\, d \frac{\delta}{x} \overset{1}{y} \ldots - \overset{0}{Y}_1 \frac{\delta}{x} \overset{0}{y} - \overset{0}{Y}_2\, d \frac{\delta}{x} \overset{0}{y} \ldots$

$+ \overset{1}{Z}_1 \frac{\delta}{x} \overset{1}{z} + Z_2\, d \frac{\delta}{x} \overset{1}{z} \ldots - \overset{0}{Z}_1 \frac{\delta}{x} \overset{0}{z} - \overset{0}{Z}_2\, d \frac{\delta}{x} \overset{0}{z} \ldots,$

wozu noch die Größe $\overset{1}{v} \frac{\delta}{w} \overset{1}{x} - \overset{0}{v} \frac{\delta}{w} \overset{0}{x}$ hinzukommt, wenn x von w abhängt.

Drittens wenn $v = f\left(x, y, z, \frac{d}{x} z, \frac{d}{y} z, \frac{d^2}{x^2} y \ldots\right)$, so ist die Bedingungs-Gleichung für die Existenz von $\delta(u)$

404. $(Z) = 0$

und nachdem diese erfüllt worden, ist

405. $\delta(u) = \frac{y}{d}(Z_x) + \frac{x}{d}(Z_y) \ldots$

wozu noch die Größe $\frac{y}{d}(v)\frac{\delta}{w} x + \frac{x}{d}(v)\frac{\delta}{w} y$ hinzukommt, wenn die Elemente x und y von w abhängen.

255.

Ist v von der Art, daß die Bedingungs-Gleichungen für die Existenz von δw von selbst erfüllt werden, so ist δu möglich und angeblich für jede beliebige Abhängigkeit der zusammengesetzten Größen von den Elementen. Werden hingegen die Bedingungs-Gleichungen nicht erfüllt, so bestimmen sie diejenige Abhängigkeit der zusammengesetzten Größen von den Elementen, die zur Existenz von δu nothwendig ist. Z. B. im einfachsten Fall $v = f(x, y, dy, d^2y \ldots)$, von welchem sich leicht die Anwendung auf die übrigen Fälle machen läßt, ist die Bedingungs-Gleichung

$$Y = \frac{d}{y} v - d \frac{d}{dy} v + d^2 \frac{d}{d^2y} v \ldots = 0$$

Wird diese Gleichung von selbst erfüllt, so folgt daraus für das Verhältniß zwischen x und y nichts, sondern δu ist für jedes beliebige Verhältniß zwischen x und y angebbar. Trifft hingegen die Gleichung nicht zu, so bestimmt sie dasjenige Verhältniß zwischen x und y, welches zur Existenz von δu

nothwendig ist. Da die Größen $\frac{d}{y}v$, $d\frac{d}{dy}v$, $d^2\frac{d}{d^2y}v\ldots$ sämmtlich, sowohl x als y und dy, $d^2y\ldots$ enthalten können, so ist die Gleichung $Y = o$ eine abgeleitete, die zurückgeleitet werden muß, um das durch sie bestimmte Verhältniß zwischen x und y zu finden. Steigt die Ableitung von y, in v, bis zur nten Ordnung, so kann die Bedingungs-Gleichung $Y = o$ von der 2nten Ordnung seyn, denn das letzte Glied derselben ist $d^n\frac{d}{d^ny}v$ und da $\frac{d}{d^ny}v$ noch d^ny enthalten kann, so kann $d^n\frac{d}{d^ny}v$ bis auf die 2nte Ordnung steigen. Die Urgleichung $Y = o$ kann also bis zu 2n willkührliche Constanten bekommen.

Ist der Gegenstand, auf welchen sich v bezieht, eine krumme Linie, deren Coordinaten x und y sind, so giebt die Bedingungs-Gleichung $Y = o$ die Gleichung der krummen Linie und folglich ihre Gestalt.

256.

Die Natur der Aufgabe bestimmt, womit der Ausdruck für δu, der übrig bleibt nachdem die Bedingungs-Gleichung $Y = o$ erfüllt worden, verglichen werden soll. Wäre etwa $\delta u = o$, und die Grenzen, auf welche sich δu bezieht, wären gegeben und unveränderlich, so daß also die Werthe von y, dy, $d^2y\ldots$ für die beiden Grenzen bestimmt wären, so wären die in δu vorkommenden Variations-Coefficienten $\frac{\delta^{\text{I}}}{x}y$, $\frac{\delta^{\text{o}}}{x}y$, $d\frac{\delta^{\text{I}}}{x}y$, $d\frac{\delta^{\text{o}}}{x}y\ldots$ sämmtlich gleich o, so daß aus der Gleichung $\delta u = o$ nichts weiter folgen würde. Wären aber die Grenzen unbestimmt und die Variations-Coefficienten von einander unabhängig, so müßte man die Größen, worin sie multiplicirt sind, einzeln $= o$ setzen, woraus eben so viele Gleichungen für die Grenzen folgen würden. Sind einzelne Bedingungen für die Variations-Coefficienten an den Grenzen gegeben, so müssen dieselben in die Gleichung δu eingeführt und die Zahl der Coefficienten muß auf so wenige als mög-

lich gebracht werden, die denn von einander unabhängig sind.

In jedem Fall bezieht sich der Werth von δu allemal auf die Grenzen von u, wie sich aus den unten folgenden Beispielen deutlicher zeigt.

VII. Mittel, gegebene Bedingungen zwischen den abhängigen Größen in Rechnung zu bringen.

257.

Wenn in v mehrere von x abhängige Größen y, z... vorkommen, so daß $v = f(x, y, dy, d^2y \ldots z, dz, d^2z \ldots)$, so ist die Bedingungs-Gleichung für die Existenz von $\delta u = \frac{1}{d}\delta u$:

$$Y \frac{\delta}{x} y + Z \frac{\delta}{x} z \ldots = 0 \text{ (§. 54. Zweitens.)}$$

$$\text{wo } Y = \frac{d}{y} v - d \frac{d}{dy} v + d^2 \frac{d}{d^2y} v \ldots$$

$$Z = \frac{d}{z} v - d \frac{d}{dz} v + d^2 \frac{d}{d^2z} v \ldots \text{ etc.}$$

Sind die Größen y, z von einander unabhängig, so sind es auch die Variations-Coefficienten $\frac{\delta}{x} y, \frac{\delta}{x} z \ldots$ und folglich sind in diesem Falle einzeln

$$Y = 0, Z = 0 \ldots$$

Sind hingegen gewisse Bedingungen zwischen y, z... gegeben, so haben dieselben auch auf die Variations-Coefficienten $\frac{\delta}{x} y, \frac{\delta}{x} z \ldots$ Einfluß, und es kommt darauf an, diesen Einfluß in Rechnung zu bringen.

1. Wären z. B. zwei Größen y und z vorhanden, und es wäre eine Gleichung zwischen x, y und z von der Form

$$406. \quad \varphi(xyz) = 0$$

gegeben, so müßte man den Einfluß suchen, den das daraus

folgende Verhältniß zwischen y und z, auf das Verhältniß zwischen den Variations-Coefficienten $\frac{\delta}{x} y$ und $\frac{\delta}{x} z$ hat. Zu dem Ende darf man nur die erste Variations-Gleichung von $\varphi (xyz) = o$ nehmen. Denn da die Gleichung $\varphi (x, yz) = o$ auch für das variirte Verhältniß von y und z zu x gelten muß, in sofern überhaupt eine Veränderung dieses Verhältnisses erlaubt ist, so kann man in $\varphi (xyz) = o$, $y + \varkappa \frac{\delta}{x} y + \frac{\varkappa^2}{2} \frac{\delta^2}{x^2} y \ldots$ statt y, $z + \varkappa \frac{\delta}{x} z + \frac{\varkappa^2}{2} \frac{\delta^2}{x^2} z \ldots$ statt z, auch wenn etwa x noch als abhängig von w betrachtet werden muß, $x + \varkappa \frac{\delta}{w} x + \frac{\varkappa^2}{2} \frac{\delta^2}{w^2} x \ldots$ statt x setzen. Dieses giebt, wenn der Kürze wegen $\varphi\, xyz = \alpha$ ist, für den ersten Variations-Coefficienten von α:

$$\frac{d}{x} \alpha \frac{\delta}{w} x + \frac{d}{y} \alpha \frac{\delta}{w} y + \frac{d}{z} \alpha \frac{\delta}{w} z = o$$

zu gleicher Zeit ist für den ersten Ableitungs-Coefficienten von α

$$\frac{d}{x} \alpha + \frac{d}{y} \alpha dy + \frac{d}{z} \alpha dz = o.$$

Multiplicirt man die letzte Gleichung mit $\frac{\delta}{w} x$ und zieht sie von der ersten ab, so kommt

$$\frac{d}{y} \alpha \left(\frac{\delta}{w} y - dy \frac{\delta}{w} x\right) + \frac{d}{z} \alpha \left(\frac{\delta}{w} z - dz \frac{\delta}{w} x\right) = o$$

oder auch weil $\frac{\delta}{w} y - dy \frac{\delta}{w} x = \frac{\delta}{x} y$, $\frac{\delta}{w} z - dz \frac{\delta}{w} x = \frac{\delta}{x} z$,

$$\frac{d}{y} \alpha \frac{\delta}{x} y + \frac{d}{z} \alpha \frac{\delta}{x} z = o.$$

Diese Gleichung enthält die Bedingung, welche die Gleichung $\varphi (xyz) = o$ für das Verhältniß zwischen den Größen $\frac{\delta}{x} y$ und $\frac{\delta}{x} z$ giebt. Verbindet man sie daher mit der allgemeinen Bedingungs-Gleichung $Y \frac{\delta}{x} y + Z \frac{\delta}{x} z = o$, indem man z. B. die erste Gleichung mit Y, die andere mit

$\frac{d}{y}\alpha$ multiplicirt, und Eins von dem Andern abzieht, so erhält man die Gleichung $\frac{d}{z}\alpha.\ Y\frac{\delta}{x}z - \frac{d}{y}\alpha.\ Z\frac{\delta}{x}z = 0$ oder

$$407.\quad Y\frac{d}{z}\alpha - Z\frac{d}{y}\alpha = 0$$

in welcher nunmehr das Verhältniß zwischen y und z, welches die Gleichung $\varphi\,(xyz) = 0$ vorschreibt, bei der allgemeinen Bedingungs-Gleichung berücksichtigt ist. Verbindet man daher noch diese Gleichung $Y\frac{d}{z}\alpha - Z\frac{d}{y}\alpha$ mit der Gleichung $\varphi\,(xyz) = 0$ selbst, so läßt sich y und z in x ausdrücken, welches dann die nothwendige Abhängigkeit der Größen y und z von x angiebt.

II. Wäre eine Gleichung zwischen x, y und z von der Form

$$408.\quad \varphi\,(x, y, dy, d^2y \ldots z, dz, d^2z \ldots) = 0 \text{ oder } \alpha = 0$$

gegeben, so müßte man davon wieder die ersten Variations-Coefficienten nehmen, um das von der Gleichung bestimmte Verhältniß zwischen $\frac{\delta}{x}y$ und $\frac{\delta}{x}z$ zu finden.

Die Verwandlungs-Operation giebt;

$$\frac{d}{y}\alpha\ \frac{\delta}{x}y + \frac{d}{dy}\alpha\ d\frac{\delta}{x}y + \frac{d}{d^2y}\alpha\ d^2\frac{\delta}{x}y \ldots$$

$$+\frac{d}{z}\alpha\ \frac{\delta}{x}z + \frac{d}{dz}\alpha\ d\frac{\delta}{x}z + \frac{d}{d^2z}\alpha\ d^2\frac{\delta}{x}z \ldots = 0$$

Hiermit müßte die allgemeine Bedingungs-Gleichung $Y\frac{\delta}{x}y + Z\frac{\delta}{x}z = 0$ verbunden, und es müßten $\frac{\delta}{x}y$ und $\frac{\delta}{x}z$ weggeschafft werden. Allein hiezu ist die Zurückleitung nöthig, welches die Rechnung verwickelt und schwierig macht. Diese Schwierigkeit zu vermeiden bedient man sich des Mittels, die Bedingtheit zwischen Größen auf neue, willkührlich gewählte und eingeführte Größen zu übertragen, und dadurch die gegebenen Größen von einander unabhängig zu machen, wel-

ches dadurch geschieht, daß man die Bedingungs-Gleichungen zwischen den Größen, deren Verhältnisse zu einander berücksichtigt werden sollen, auf Null bringt, jede mit einem willkührlichen unbestimmten Coefficienten multiplicirt, die multiplicirten, der Null gleichen Größen, zu der gegebenen addirt und mit diesem umfassenderen Ausdruck, in welchem nun die Bedingungs-Gleichungen berücksichtigt sind, verfährt, wie ohne sie geschehen würde.

258.

Es sey z. B.

$$v = f(x, y, dy, d^2y \ldots z, dz, d^2z \ldots t, dt, d^2t \ldots)$$

Zur Bestimmung der Verhältnisse zwischen den abhängigen Größen y, z, t... sollen die Bedingungs-Gleichungen

$$408. \quad \alpha = o, \beta = o \ldots$$

gegeben seyn, in welchen α, β... die sämmtlichen Größen y, z, t... mit ihren Ableitungen, so wie auch x enthalten, also von einer ähnlichen Gestalt wie v selbst, seyn können.

I. Man nehme von den Gleichungen $\alpha = o$, $\beta = o$... die ersten Variations-Gleichungen, die mit ihnen zugleich Statt finden, weil das Verhältniß zwischen y und x, z und x u. s. w. verändert werden kann, so erhält man, im Fall noch x von w abhängt,

$$409. \begin{cases} \frac{\delta}{w}(\alpha) = \frac{d}{x}(\alpha)\frac{\delta}{w}x + \frac{d}{y}\alpha\frac{\delta}{x}y + \frac{d}{dy}\alpha\, d\frac{\delta}{x}y \ldots \\ \qquad + \frac{d}{z}\alpha\frac{\delta}{x}z + \frac{d}{dz}\alpha\, d\frac{\delta}{x}z \ldots \text{ꝛc.} \\ \frac{\delta}{w}(\beta) = \frac{d}{x}(\beta)\frac{\delta}{w}x + \frac{d}{y}\beta\frac{\delta}{x}y + \frac{d}{dy}\beta\, d\frac{\delta}{x}z \ldots \\ \qquad + \frac{d}{z}\beta\frac{\delta}{x}z + \frac{d}{dz}\beta\, d\frac{\delta}{x}z \ldots \text{ꝛc.} \end{cases}$$

Diese Gleichungen $\frac{\delta}{w}(\alpha) = o$, $\frac{\delta}{w}(\beta) = o$... multiplicire man man mit unbestimmten Größen λ, μ... und addire die Producte zu $\frac{\delta}{w}(v)$, welches, weil diese Producte sämmtlich $= o$

sind, angeht, ohne den Werth von $\frac{\delta}{w}(v)$ zu verändern, so erhält man statt $\frac{\delta}{w}(v)$, nunmehr

$$410. \quad \frac{\delta}{w}(v) + \lambda \frac{\delta}{w}(v) + \mu \frac{\delta}{w}(\beta)$$

I. Sucht man hierzu, anstatt zu $\frac{\delta}{w}(v)$ allein, die Stammgröße δu, so ist in der Bedingungs-Gleichung, welche für ihre Existenz Statt finden muß, schon das Verhältniß zwischen den abhängigen Größen y, z, t... welches die Gleichungen $\alpha = 0$, $\beta = 0$... vorschreiben, berücksichtigt. Also kann man alsdann die Variations-Coeffiкienten $\frac{\delta}{x}y$, $\frac{\delta}{x}z$, $\frac{\delta}{x}t$... die in der Bedingungs-Gleichung für die Existenz von δu, vorkommen, als von einander unabhängig betrachten, und ihre Coefficienten einzeln gleich Null setzen. Die Abhängigkeit, welche die Gleichungen $\alpha = 0$, $\beta = 0$... bestimmen, ist jetzt auf die neuen unbestimmten Größen λ, μ... übertragen worden. Wären nämlich n Größen y, z, t... vorhanden, und m Bedingungs-Gleichungen $\alpha = 0$, $\beta = 0$... zwischen diesen n Größen gegeben, so sind noch $n - m$ Größen als unabhängig zu betrachten. Multiplicirt man nun die Bedingungs-Gleichungen $\frac{\delta}{x}(\alpha) = 0$, $\frac{\delta}{x}(\beta) = 0$... jede mit einem neuen unbestimmten Coofficienten, wie λ, μ... so kommen m neue willkührliche Größen hinzu, also sind jetzt $m + n$ Größen, y, z, t.. λ, μ... vorhanden, von welchen m Größen mehr, also nun überhaupt $(n - m) + m = n$ Größen unabhängig sind. Nun ist es, nachdem die sämmtlichen Größen mit einander verbunden worden, gleichgültig, welche m Größen man als unabhängig von einander betrachtet; also kann man dazu auch die n Größen y, z, t... wählen. Folglich ist die theilweise Abhängigkeit, welche die m Gleichungen $\alpha = 0$, $\beta = 0$... für diese Größen bestimmen, gleichsam auf die m neue Größen λ, μ... übertragen worden, und es sind dadurch die ursprünglichen Größen y, z, t... unabhängig geworden, so daß

man die Coefficienten zu $\frac{\delta}{x}y, \frac{\delta}{x}z, \frac{\delta}{x}t\ldots$ nunmehr einzeln gleich Null setzen kann.

Die Rechnung für den obigen Fall ist folgende:

III. Es war

$$\lambda\frac{\delta}{w}\alpha = \lambda\frac{d}{x}(\alpha)\frac{\delta}{w}x + \lambda\frac{d}{y}\alpha\frac{\delta}{x}y + \lambda\frac{d}{dy}\alpha d\frac{\delta}{x}y\ldots$$
$$+ \lambda\frac{d}{z}\alpha\frac{\delta}{x}z + \lambda\frac{d}{dz}\alpha d\frac{\delta}{x}z\ldots$$

Das erste Glied $\lambda\frac{d}{x}(\alpha)\frac{\delta}{w}x$ ist auch $\frac{d}{x}(\lambda\alpha)\frac{\delta}{w}x -$ $\alpha\frac{d}{x}\lambda\frac{\delta}{w}x$ weil $\frac{\delta}{w}x$ für die Ableitung nach x eine Constante ist. Der zweite Theil dieser letzten Größe ist o, weil $\alpha = 0$ ist (408.). Von dem ersten Theil ist die Stammgröße $\lambda\alpha\frac{\delta}{w}x + \text{Const.}$ Allein auch diese Größe ist Null, weil $\alpha = 0$ ist. Also hat das erste Glied $\lambda\frac{d}{x}(\alpha)\frac{\delta}{w}x$ der Größe $\lambda\frac{\delta}{w}\alpha$, auf das Resultat keinen Einfluß. Mithin bleiben nur die übrigen Glieder.

IV. Man setze der Kürze wegen $\frac{\delta}{x}y = \varepsilon, \frac{\delta}{x}z = \varepsilon'$

$$\lambda\frac{d}{y}\alpha = p,\ \lambda\frac{d}{dy}\alpha = q,\ \lambda\frac{d}{d^2y}\alpha = r\ldots$$
$$\lambda\frac{d}{z}\alpha = p',\ \lambda\frac{d}{dz}\alpha = q',\ \lambda\frac{d}{d^2z}\alpha = r'\ldots$$

so ist, weil das erste Glied von $\lambda\frac{\delta}{w}\alpha$ nicht mehr in Betracht kommt,

$$\lambda\frac{\delta}{w}\alpha = p\varepsilon + qd\varepsilon + rd^2\varepsilon + sd^3\varepsilon,\ldots$$
$$+ p'\varepsilon' + q'd'\varepsilon' + r'd^2\varepsilon' + s'd^3\varepsilon'\ldots \text{ etc.}$$

Nun ist, wie in (§. 248. I.) z. B.

$qd\varepsilon = d(q\varepsilon) - \varepsilon dq$
$rd^2\varepsilon = d(rd\varepsilon) - d(\varepsilon dr) + \varepsilon d^2 r$
$sd^3\varepsilon = d(sd^2\varepsilon) - d(dsd\varepsilon) + d(\varepsilon d^2 s) - \varepsilon d^3 s \ldots$ etc.
also ist

$$\lambda \frac{\delta}{w} \alpha = (p - dq + d^2 r \ldots)\varepsilon + (p' - dq' + d^2 r \ldots)\varepsilon' \ldots$$
$$+ d[(q - dr + d^2 s \ldots)\varepsilon + (r - ds \ldots) d\varepsilon]$$
$$+ d[(q' - dr' + d^2 s' \ldots)\varepsilon' + (r' - ds' \ldots) d\varepsilon' \ldots]$$

Davon ist die Stammgröße, oder derjenige Theil von δu, der von $\lambda \frac{\delta}{w} \alpha$ herkommt,

$$(q - dr + d^2 s \ldots)\varepsilon + (r - ds \ldots) d\varepsilon \ldots$$
$$+ (q' - dr' + d^2 s' \ldots)\varepsilon' + (r' - ds' \ldots) d\varepsilon' \ldots \text{ etc.}$$

oder

$$411. \left\{ \begin{array}{l} \left(\lambda \frac{d}{dy}\alpha - d\left(\lambda \frac{d}{d^2 y}\alpha\right) + d^2\left(\lambda \frac{d}{d^3 y}\alpha\right) \ldots\right) \frac{\delta}{x} y \\ \qquad + \left(\lambda \frac{d}{d^2 y}\alpha - d\left(\lambda \frac{d}{d^3 y}\alpha\right) \ldots\right) d \frac{\delta}{x} y \\ \qquad - - - - - \\ + \left(\lambda \frac{d}{dz}\alpha - d\left(\lambda \frac{d}{d^2 z}\alpha\right) + d^2\left(\lambda \frac{d}{d^3 z}\alpha\right) \ldots\right) \frac{\delta}{x} z \\ \qquad + \left(\lambda \frac{d}{d^2 z}\alpha - d\left(\lambda \frac{d}{d^3 z}\alpha\right) \ldots\right) d \frac{\delta}{x} z \end{array} \right.$$

$$- - - - -$$

welcher Theil der Stammgröße Statt findet, sobald die Größen, welche sich in $\frac{\delta}{w} \alpha$, außerhalb des Zeichens d befinden, gleich Null sind, also, sobald

$$(p - dq + d^2 r \ldots)\varepsilon + (p' - dq' + d^2 r \ldots)\varepsilon' \ldots = 0$$

oder

$$412. \left\{ \begin{array}{l} \left[\lambda \frac{d}{y}\alpha - d\left(\lambda \frac{d}{dy}\alpha\right) + d^2\left(\lambda \frac{d}{d^2 y}\alpha\right) \ldots\right] \frac{\delta}{x} y \\ + \left[\lambda \frac{d}{z}\alpha - d\left(\lambda \frac{d}{dz}\alpha\right) + d^2\left(\lambda \frac{d}{d^2 z}\alpha\right) \ldots\right] \frac{\delta}{z} z \ldots = 0 \end{array} \right.$$

ist, welche Gleichung also den von $\lambda \frac{\delta}{w} \alpha$ herkommenden Theil der Bedingungs-Gleichung für die Existenz von δu ausmacht.

V. So wie in (§. 254.) die Größe $\frac{d}{y} v - d \frac{d}{dy} v..$ durch Y, die Größe $\frac{d}{dy} v - d \frac{d}{d^2y} v...$ durch Y u. s. w. bezeichnet worden, so setze man hier, der Kürze wegen

$$\lambda \frac{d}{y} \alpha - d \left(\lambda \frac{d}{dy} \alpha\right) + d^2 \left(\lambda \frac{d}{d^2y} \alpha\right) ... = (Y)$$

$$\lambda \frac{d}{dy} \alpha - d \left(\lambda \frac{d}{d^2y} \alpha\right) ... = (Y_1) ...$$

u. s. w. und ähnliche Buchstaben für die Größen, die sich auf z statt auf y beziehen, so ist der von $\lambda \frac{\delta}{w} \alpha$ herkommende Theil der Bedingungs-Gleichung für die Existenz von δu

$$413. \quad (Y) \frac{\delta}{x} y + (Z) \frac{\delta}{x} z ... = 0,$$

der von $\lambda \frac{\delta}{w} \alpha$ herkommende Theil der Größe δu selbst aber ist

$$414. \left\{ \begin{array}{l} (Y_1) \frac{\delta}{x} y + (Y_2) d \frac{\delta}{x} y ... \\ + (Z_1) \frac{\delta}{x} z + (Z_2) d \frac{\delta}{z} z ... \text{ etc.} \end{array} \right.$$

VI. Unterscheidet man auf gleiche Weise die ähnlichen Ausdrücke, welche von dem Theile $\mu \frac{\delta}{w} (\beta)$, der hier an die Stelle der Größe $\frac{\delta}{w} (v)$ tretenden Größen (410.) herkommen, durch zwei Klammern, so ist der davon herrührende Theil der Bedingungs-Gleichung

$$415. \quad ((Y)) \frac{\delta}{x} y + ((Z)) \frac{\delta}{x} z ... = 0$$

und der dazu gehörige Theil der Größe δu selbst

416.

$$416.\quad \left((Y_1)\right)\frac{\delta}{x}y + \left((Y_2)\right)d\frac{\delta}{x}y \ldots$$

$$+ \left((Z_1)\right)\frac{\delta}{x}y + \left((Z_2)\right)d\frac{\delta}{x}z \ldots \text{ etc.}$$

VII. Die gesammte Bedingungs-Gleichung für die Existenz von δu ist also jetzt

$$\left.\begin{array}{l} Y\frac{\delta}{x}y + Z\frac{\delta}{x}z \ldots \\ + (Y)\frac{\delta}{x}y + (Z)\frac{\delta}{x}z \ldots \\ + \left((Y)\right)\frac{\delta}{x}y + \left((Z)\right)\frac{\delta}{x}z \ldots \end{array}\right\} = 0$$

oder

$$417 \left\{\begin{array}{l} + \left[Y + (Y) + \left((Y)\right) \ldots\right]\frac{\delta}{x}y \\ + \left[Z + (Z) + \left((Z)\right) \ldots\right]\frac{\delta}{x}z \ldots \text{ etc.} = 0 \end{array}\right.$$

worin

$$Y = \frac{d}{y}v - d\frac{d}{dy}v + d^2\frac{d}{d^2y}v \ldots$$

$$(Y) = \lambda\frac{d}{y}\alpha - d(\lambda\frac{d}{dy}\alpha) + d^2(\lambda\frac{d}{d^2y}\alpha) \ldots$$

$$\left((Y)\right) = \mu\frac{d}{y}\beta - d(\mu\frac{d}{dy}\beta) + d^2(\mu\frac{d}{d^2y}\beta) \ldots \text{ etc.}$$

Die Größe δu aber ist $\frac{\delta}{w}(u)$

$$= v\frac{\delta}{w}x + \overset{1}{Y}\frac{\delta}{x}y + \overset{2}{Y}d\frac{\delta}{x}y \ldots + \overset{1}{Z}\frac{\delta}{x}z + \overset{2}{Z}d\frac{\delta}{x}y \ldots$$

$$+ (\overset{1}{Y})\frac{\delta}{x}y + (\overset{2}{Y})d\frac{\delta}{x}y \ldots + (\overset{1}{Z})\frac{\delta}{x}z + (\overset{2}{Z})d\frac{\delta}{x}y \ldots$$

$$+ \left((\overset{1}{Y})\right)\frac{\delta}{x}y + \left((\overset{2}{Y})\right)d\frac{\delta}{x}y \ldots + \left((\overset{1}{Z})\right)\frac{\delta}{x}z + \left((\overset{2}{Z})\right)d\frac{\delta}{x}z \ldots$$

u. s. w. oder

418. $\frac{\delta}{w}(u)$

$$=v\frac{\delta}{w}x+\left[\overset{1}{Y}+(\overset{1}{Y})+\left((\overset{1}{Y})\right)..\right]\frac{\delta}{x}z+\left[\overset{1}{Z}+(\overset{1}{Z})+\left((\overset{1}{Z})\right)..\right]\frac{\delta}{x}z$$

$$+\left[\overset{2}{Y}+(\overset{2}{Y})+\left((\overset{2}{Y})\right)..\right]d\frac{\delta}{x}z+\left[\overset{2}{Z}+(\overset{2}{Z})+\left((\overset{2}{Z})\right)..\right]d\frac{\delta}{x}z$$

u. s. w. welche auf die Grenzen bezogen werden muß, und worin

$$\overset{1}{Y} = \frac{d}{dy}v - d\frac{d}{d^2y}v + d^2\frac{d}{d^3y}v \ldots$$

$$(\overset{1}{Y}) = \lambda\frac{d}{dy}\alpha - d\left(\lambda\frac{d}{d^2y}\alpha\right) + d^2\left(\lambda\frac{d}{d^3y}\alpha\right) \ldots$$

$$\left((\overset{1}{Y})\right) = \mu\frac{d}{dy}\beta - d\left(\mu\frac{d}{d^2y}\beta\right) + d^2\left(\mu\frac{d}{d^3y}\beta\right) \ldots$$

$$\overset{2}{Y} = \frac{d}{d^3y}v + d\frac{d}{d^3y}v \ldots$$

$$(\overset{2}{Y}) = \lambda\frac{d}{d^2y}\alpha + d\left(\lambda\frac{d}{d^3y}\alpha\right) \ldots$$

u. s. w. für z immer das Aehnliche, was sich auf z bezieht.

VIII. Da nun in allen diesen Ausdrücken, die Bedingungen, welche die gegebenen Gleichungen $\alpha = 0$, $\beta = 0 \ldots$ für die Verhältnisse der Größe y, z ... unter einander vorschreiben, berücksichtigt sind, so sind jetzt die Variations-Coefficienten $\frac{\delta}{x}y$, $\frac{\delta}{x}z \ldots$ von einander unabhängig, und man kann, zufolge (II.) die Coefficienten derselben einzeln gleich Null setzen. Aus diesem Grunde, zerfällt nunmehr die Bedingungs-Gleichung für die Existenz von δu (417.) in folgende einzelne Gleichungen

$$Y + (Y) + \left((Y)\right) \ldots = 0$$

$$Z + (Z) + \left((Z)\right) \ldots = 0 \text{ etc.}$$

oder

$$
(419.)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d}{y} v - d \frac{d}{dy} v + d^2 \frac{d}{d^2y} v \ldots \\
&+ \lambda \frac{d}{y} \alpha - d\left(\lambda \frac{d}{dy} \alpha\right) + d^2\left(\lambda \frac{d}{d^2y} \alpha\right) \ldots \\
&+ \mu \frac{d}{y} \beta - d\left(\mu \frac{d}{dy} \beta\right) + d^2\left(\mu \frac{d}{d^2y} \beta\right) \ldots \\
&\ldots\ldots = 0 \\
&\frac{d}{z} v - d \frac{d}{dz} v + d^2 \frac{d}{d^2z} v \ldots \\
&+ \lambda \frac{d}{z} \alpha - d\left(\lambda \frac{d}{dz} \alpha\right) + d^2\left(\lambda \frac{d}{d^2z} \alpha\right) \ldots \\
&+ \mu \frac{d}{z} \beta - d\left(\mu \frac{d}{dz} \beta\right) + d^2\left(\mu \frac{d}{d^2z} \beta\right) \ldots \\
&\ldots\ldots = 0 \text{ etc.}
\end{aligned}
\right.
$$

welche Gleichungen zur Bestimmung der Verhältnisse dienen, die mit Rücksicht auf die Gleichungen $\alpha = 0$, $\beta = 0$.. zwischen den Größen y, z... Statt finden müssen, damit $\int u$ existire, und zu welchen man also durch das Mittel, die Variations-Coefficienten der Gleichungen $\alpha = 0$, $\beta = 0$... mit unbestimmten Coefficienten λ, μ... zu multipliciren, und sie auf die Weise in Rechnung bringen, ohne die Zurückleitungs-Operation, die sonst das Verfahren sehr erschwert haben würde, gelangt ist.

259.

Die zur Bestimmung der Größen y, z... durch x gefundenen Gleichungen (419.) enthalten noch die willkührlichen Größen λ, μ... die, weil sie willkührlich sind, zu dieser Bestimmung nicht gebraucht werden können.

Diese Größen müssen also aus den Gleichungen (419.) weggeschafft werden. Ihre Zahl ist m, nämlich so groß als die der Zahl der gegebenen Bedingungs-Gleichungen $\alpha = 0$, $\beta = 0$... Die Zahl der Gleichungen (419.) ist, wie leicht zu sehen, so groß als die Zahl der Größen y, z..., also gleich n. Schafft man daher aus den n Gleichungen (419.) die m Größen λ, μ... weg, so bleiben zur Bestimmung von y, z... in x eigentlich nur $n - m$ Gleichungen übrig, welche

dazu, auf den ersten Anblick, nicht hinzureichen schienen. Allein man hat auch zur Bestimmung von y, z... in x noch die gegebenen m Bedingungs-Gleichungen $\alpha = o$, $\beta = o$... selbst; also hat man überhaupt wirklich $(n - m) + m = n$ Gleichungen zur Bestimmung der n Größen y, z... in x, die dazu allerdings genügend sind.

260.

Was die Wegschaffung der m Größen λ, μ... aus den n Gleichungen (419.) betrifft, so scheint es, daß dazu die Zurückleitungs-Operation nöthig ist, weil auch die Ableitungen der Größen λ, μ... vorkommen. Wäre dies der Fall, so würde man durch das ganze Verfahren, welches bloß zum Zweck hatte die Zurückleitungs-Operation zu vermeiden, wenig und vielleicht Nichts gewonnen haben, und es könnte vielleicht leichter gewesen seyn, aus den gegebenen Bedingungs-Gleichungen $\alpha = o$, $\beta = o$... erst unmittelbar, durch die Zurückleitungs-Operation, die Verhältnisse zu entwickeln, die sie für die Größen y, z... und ihre Variations-Coefficienten $\frac{\delta}{x} y$, $\frac{\delta}{x} z$... bestimmen, und dann diese Verhältnisse auf die gewöhnliche Weise in die allgemeine Bedingungs-Gleichung $Y, \frac{\delta}{x} y, + Z \frac{\delta}{x} z \ldots = o$ (402.) für die Existenz von δu einzuführen; allein es verhält sich nicht so. Zur Wegschaffung der Größen λ, μ... aus den Gleichungen (419.) ist die Zurückleitungs-Operation nicht nöthig, und zwar deshalb nicht, weil die Zahl der Gleichungen allemal nothwendig größer ist, als die Zahl der aus ihnen wegzuschaffenden Größen λ, μ... denn die Zahl jener ist n, die Zahl dieser nur m, und in solchem Fall ist die Wegschaffung allemal ohne Zurückleitung, bloß durch Ableitung, möglich.

Es mögen nämlich, um ein einfaches Beispiel zu geben, zwei Gleichungen von der Form

$$\varphi\ (\lambda, d\lambda, d^2\lambda \ldots d^p\lambda) = o$$
$$\varphi'\ (\lambda, d\lambda, d^2\lambda \ldots d^q\lambda) = o$$

gegeben seyn, zwischen welchen λ weggeschafft werden soll, so

ist dazu keine Zurückleitung nöthig. Denn man nehme von der ersten Gleichung noch die Ableitungs-Gleichung von q höheren Ordnungen, von der zweiten Gleichung die Ableitungs-Gleichungen von p höheren Ordnungen, dergleichen, wie immer die Ableitungs-Gleichungen, mit den Stamm-Gleichungen zugleich existiren, so erhält man auf diese Weise überhaupt noch $p + q$ Gleichungen außer den beiden gegebenen, und hat also zusammen $p + q + 2$ Gleichungen, die sämmtlich die Größen λ, $d\lambda$, $d^2\lambda$, bis zu $d^{p+q}\lambda$, welche weggeschafft werden sollen, enthalten können. Die Zahl dieser Größen ist aber nur $p + q + 1$. Sie können also sämmtlich zwischen den $p + q + 2$ Gleichungen, durch bloße algebraische Operationen, ohne alle Zurückleitung, weggeschafft werden.

Da nun auf diese Weise eine Größe wie λ mit allen ihren Ableitungen jedesmal zwischen 2 Gleichungen weggeschafft werden kann, so können zwei Größen, wie λ und μ mit allen ihren Ableitungen zwischen 3 Gleichungen, und überhaupt $n - 1$ Größen, wie λ, μ... mit allen ihren Ableitungen zwischen n Gleichungen weggeschafft werden. Da nun die Zahl m der obigen Größen λ, μ ... nie größer ist als $n - 1$, so können diese Größen allemal durch die bloße Ableitung, und hernach durch bloße algebraische Operationen weggeschafft werden. Die Zurückleitungs-Operation wird ganz vermieden; welches der Zweck der Methode war.

Diese einfache Methode willkührlicher Multiplication, deren sich Lagrange mit so großem Erfolge in der analytischen Mechanik bedient, ist wahrscheinlich noch in vielen andern Fällen der Rechenkunst anwendbar, und vielleicht, wo sie sich anwenden läßt, von bedeutendem Nutzen.

VIII. Anwendung der Verwandlungs-Operation auf Maxima und Minima.

261.

Der Zweck alles Vorigen war, die Ausdrücke der Variations-Coefficienten einer Größe u, besonders ihre erste Variations-Coefficienten zu finden, wenn diese Größe u nicht selbst,

sondern nur ihre erste Ableitung $v = du$ gegeben ist. Die jedesmalige Aufgabe muß nun durch die Bedeutung von u selbst bestimmen, was δu ausdrücke und welchen Werth es habe. Von diesem Werthe kennt man dann, vermöge der obigen Untersuchungen, den analytischen Ausdruck durch das gegebene $v = du$ und kann nun daraus, was die Aufgabe verlangt, weiter finden.

Der einfachste Werth von δu ist ohne Zweifel der Werth o. Daß δu, wie sich sogleich zeigen wird, diesen Werth wirklich bekömmt, wenn u ein Maximum oder Minimum seyn soll, ist wahrscheinlich der Grund, warum bis jetzt die Variations-Rechnung auf die Untersuchung größter oder kleinster Werthe von u vorzüglich angewendet worden ist. Allein die Rechnung ist vielleicht keineswegs auf jenen einzelnen Fall beschränkt; es kommt nur darauf an, daß die Aufgabe eine Gleichung gebe, worin δu oder δu, $\delta^2 u$, $\delta^3 u \ldots$ u. s. w. vorkommen; so läßt sich entweder diese Gleichung, wenn es bequemer seyn sollte, auf o bringen, oder es lassen sich in dieselbe, wie sie ist, die Ausdrücke von δu $\delta^2 u \ldots$ die allemal u selbst nicht bedürfen, substituiren und daraus für die Aufgabe Schlüsse ziehen. So z. B. hat Lagrange gezeigt, daß die gesammte Mechanik auf den Variations-Calcul gebaut und folglich gleichsam auf eine Aufgabe von den größten oder kleinsten Werthen bestimmter Ausdrücke gebracht werden könne. Wahrscheinlich ist auch die Variations-Methode in der Rechenkunst (der sogenannten höhern Analysis) von manchem andern Nutzen, und ihre weitere Ausbildung und Anwendung steht noch bevor.

Hier soll bloß von der Anwendung auf Maxima und Minima die Rede seyn, und es sollen dann noch einige Beispiele von dieser Anwendung folgen.

262.

Es bezeichne u irgend einen Gegenstand, der sich durch unabhängig veränderliche, und von diesen abhängige Größen ausdrücken läßt. Der Ausdruck für u aber soll nicht gegeben seyn, sondern nur die erste Ableitung von u, die v heißt. Nun

drücke u zwar immer einerlei Art von Gegenständen aus; die Bezeichnung durch v sey aber von der Art, daß sich die bestimmte unbekannte Form von u nach den Verhältnissen zwischen den Elementen und den abhängigen Größen richtet, und nach den Umständen, ohne daß sich v änderte, von unendlich verschiedener Art seyn kann. Es kommt also darauf an, unter den verschiedenen u, die alle zu einerlei v gehören, insbesondere dasjenige auszusuchen, welches zwischen gegebenen Grenzen den möglich größten oder kleinsten Werth hat. So z. B. ist bekanntlich $v = \sqrt{(1 + dy^2)}$ der Ausdruck der ersten Ableitung von der Länge einer Linie in der Ebene, wenn die Coordinaten der Linie x und y sind. Zu diesem v gehören aber unzählige u, denn es giebt unendlich viele verschiedene Linien in der Ebene, für welche alle $v = \sqrt{(1 + dy^2)}$ der erste Differential-Coefficient der Länge ist. Die Verschiedenheit der Linie entsteht aber aus der Verschiedenheit des Verhältnisses zwischen den Coordinaten x und y, welches in v unbestimmt ist. Man kann also nach demjenigen Verhältnisse zwischen den Coordinaten, oder nach derjenigen Linie fragen, deren Länge u zwischen gegebenen Grenzen die möglich-größte oder kleinste ist. Diese Bedingung für die Länge bestimmt nun die Linie selbst, und die Aufgabe, selbige zu finden, gehört deshalb für die Variations Rechnung, weil die Verhältnisse zwischen den Größen der Aufgabe unbestimmt sind, und weil es auf Veränderung der Form ihrer wechselseitigen Abhängigkeit ankommt.

Wenn also nun u den Ausdruck einer unbekannten Stammgröße von der gegebenen Größe v ist, und man soll unter allen den möglichen u, die zu v gehören, dasjenige herausfinden, welches zwischen gewissen Grenzen den größten oder kleinsten Werth hat, so kommt es darauf an, das Verhältniß zwischen den Größen der Aufgabe zu verwandeln. Denn die Absicht ist, dasjenige Verhältniß unter allen den möglichen zu finden, welches dem größten oder dem kleinsten Werthe von u entspricht. Erfolgt nun diese Verwandlung, und drücken u und v ihren Gegenstand für irgend ein beliebiges Verhältniß zwischen den Größen der Aufgabe aus; so gehen u und v in

andere Größen über, die sich, wie oben gezeigt, allemal, wie und von welchen Größen auch u und v abhängen mögen, in Reihen von der Form

$$420. \begin{cases} v + \varkappa\delta v + \frac{\varkappa^2}{2}\delta^2 v + \frac{\varkappa^3}{2.3}\delta^3 v \ldots \text{ und} \\ u + \varkappa\delta u + \frac{\varkappa^2}{2}\delta^2 u + \frac{\varkappa^3}{2.3}\delta^3 u \ldots \end{cases}$$

ausdrücken lassen. Von diesem verändertem Werthe von u und v, ist immer noch derjenige von u, eben sowohl die erste Stammgröße von dem veränderten Werthe von v, als u selbst die erste Stammgröße von v ist; denn da die Verhältnisse zwischen den Größen der Aufgabe unbestimmt sind, so bleibt u die Stammgröße von v, welche Verhältnisse man auch zwischen den Größen der Aufgabe annehmen mag. Also ist allemal

$$v + \varkappa\delta v + \frac{\varkappa^2}{2}\delta^2 v \ldots = d\,(u + \varkappa\delta u + \frac{\varkappa^2}{2}\delta^2 u \ldots)$$

oder

$$v + \varkappa\delta v + \frac{\varkappa^2}{2}\delta^2 v \ldots = du + \varkappa d\delta u + \frac{\varkappa^2}{2} d\delta^2 u \ldots$$

folglich, eben wie $v = du$, auch

$$421. \begin{cases} \delta v = d\delta u, \quad \delta^2 v = d\delta^2 u \ldots \text{ und} \\ \delta u = \frac{1}{d}\delta v, \quad \delta^2 u = \frac{1}{d}\delta^2 v \ldots \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

so daß die Variations-Coefficienten δu, $\delta^2 u \ldots$ von den Variations-Coefficienten δv, $\delta^2 v \ldots$ abhängen. Wie sich aber diese letzten, und dann durch Zurückleitung, aus ihnen δu, $\delta^2 u$ finden lassen, lehrt das Obige.

Nun bezeichne u selbst grade denjenigen Werth von u, den man sucht, nämlich den größten oder kleinsten, so muß jeder andere, zunächst daran grenzende Werth von u, im ersten Fall kleiner, im andern größer seyn als u, also muß im ersten Fall $u + \varkappa\delta u + \frac{\varkappa^2}{2}\delta^2 u \ldots$ allemal kleiner seyn, im andern Fall allemal größer seyn als u, das heißt: im ersten Fall muß $\varkappa\delta u + \frac{\varkappa^2}{2}\delta^2 u \ldots$ allemal negativ, im andern Fall allemal

positiv seyn, und zwar kommt es insbesondere nur auf den, zunächst an das Maximum oder Minimum angrenzenden Werth von u an; denn ein Maximum oder Minimum ist nicht sowohl der größte oder kleinste Werth unter allen möglichen Werthen, sondern der größte oder kleinste unter den zunächst daran liegenden. Eine Größe kann nämlich mehrere Maxima und Minima haben, und zwar so viele als die Gleichung, die das Maximum und Minimum bestimmt, Wurzeln hat. Allein diese Wurzeln drücken, jede mit gleichem Recht, ein Maximum oder Minimum aus, und ein größter Werth ist kein anderer als derjenige, bei welchem das Zunehmen in Abnehmen, ein kleinster, bei welchem das Abnehmen in Zunehmen übergeht. Die Punkte der Maxima und Minima sind die Culminations-Punkte der veränderlichen Größen. Stellt man sich die Werthe einer abhängigen Größe unter den Ordinaten einer krummen Linie vor, so sind alle diejenige Ordinaten Maxima und Minima, bei welchen die krumme Linie ihren Lauf, in Beziehung auf die Axe, ändert. Diejenigen sind Maxima, wo sich die Linie, die sich bis dahin von der Axe entfernte, derselben zu nähern anfängt, und diejenigen Minima, wo das Entgegengesetzte anfängt. Es kommt also, wie gesagt, nur darauf an, daß beim Maximum, sowohl die Werthe der veränderten Größe, die dem Maximum zunächst vorhergehen, als diejenigen, die unmittelbar darauf folgen, kleiner, beim Minimum größer sind.

Die Verschiedenheit der Werthe von u wird nun hier durch die Größe $\varkappa$ allein bestimmt, und zwar sowohl durch ihren Werth, als durch die Art ihres Hinzutritts zu dem Ausdruck der wechselseitigen Abhängigkeit der Größen der Aufgabe. Welche aber auch diese seyn mag, so ist doch unstreitig der Unterschied $\varkappa \delta u + \frac{\varkappa^2}{2} \delta^2 u \ldots$ um so kleiner, je kleiner $\varkappa$ ist, denn die Größen δu, $\delta^2 u$ enthalten weiter kein $\varkappa$, also liegen die verschiedenen Werthe von u, dem ersten Werthe u selbst um so näher, je kleiner $\varkappa$ ist, und folglich sind die zunächst auf u folgenden Werthe von u, diejenigen, für welche $\varkappa$ kleiner ist als jede gegebene Größe. Daß aber die zunächst auf

u selbst folgenden Werthe von u alle entweder größer oder kleiner sind als u, entscheidet, ob u den möglich-größten oder kleinsten Werth unter allen zunächst daran grenzenden habe.

Es sind aber für diejenigen $\varkappa$, welche kleiner sind als jede gegebene Größe, nur zwei verschiedene Werthe möglich, nämlich ein positiver und ein negativer; also muß die Größe $\varkappa \delta u + \frac{\varkappa^2}{2} \delta^2 u \ldots$ allemal negativ seyn wenn u ein Größtes seyn soll, und allemal positiv, wenn u ein Kleinstes ist, man mag $\varkappa$ positiv oder negativ setzen. Nun aber ist das erste Glied der Größe $\varkappa \delta u + \frac{\varkappa^2}{2} \delta^2 u \ldots$ wenn $\varkappa$ sehr klein ist, allemal größer als die Summe aller übrigen, denn man gebe der Größe die Gestalt $\varkappa \left(\delta u + \frac{\varkappa}{2} \delta^2 u + \frac{\varkappa^2}{2.3} \delta^3 u \ldots\right)$ so ist klar, daß weil $\varkappa$ so klein angenommen werden kann als man will, jedes mögliche δu, weil es kein $\varkappa$ enhält, noch immer größer seyn werde, als die Glieder $\frac{\varkappa}{2} \delta^2 u + \frac{\varkappa^2}{2.3} \delta^3 u \ldots$ zusammengenommen. Daraus folgt, daß die Bedingung, die Größe $\varkappa \delta u + \frac{\varkappa^2}{2} \delta^2 u \ldots$ solle immer positiv oder immer negativ seyn, man mag $\varkappa$ positiv oder negativ setzen, zu erfüllen unmöglich ist, so lange das erste Glied $\varkappa \delta u$ existirt; denn δu an sich selbst mag positiv oder negativ seyn, so wechselt $\varkappa \delta u$ das Zeichen mit $\varkappa$ zugleich, weil δu nicht von $\varkappa$ abhängt. Das Glied $\varkappa \delta u$ muß also, wenn ein größter oder kleinster Werth von u existiren soll, gleich o seyn, woraus, als Bedingung für die Existenz des Maximi und Minimi von u,

422. $\delta u = 0$

folgt. Nachdem das erste Glied $\varkappa \delta u$ weggefallen ist, bleibt für den Unterschied der auf u zunächst folgenden Werthe von u, $\frac{\varkappa^2}{2} \delta^2 u + \frac{\varkappa^3}{2.3} \delta^3 u \ldots$ übrig, und diese Größe ist immer positiv, wenn $\delta^2 u$ positiv, und immer negativ, wenn $\delta^2 u$ negativ ist, $\varkappa$ mag positiv oder negativ seyn; denn da wiederum das erste Glied $\frac{\varkappa^2}{2} \delta^2 u$ größer ist als alle übrigen, aus dem

nämlichen Grunde wie oben, so richtet sich das Zeichen des gesammten Unterschiedes $\frac{x^2}{2}\delta^2 u + \frac{x^3}{2.3}\delta^3 u \ldots$ nach dem Zeichen des ersten Gliedes $\frac{x^2}{2}\delta^2 u$, dieses aber nach dem Zeichen von $\delta^2 u$ allein, nicht nach dem Zeichen von x, weil das Quadrat einer Größe immer positiv ist, die Größe selbst mag positiv seyn oder negativ. Das Zeichen der Größe $\delta^2 u$ entscheidet also, ob der Unterschied zwischen u und dem nächst daran grenzenden Werthe dieser Größe, größer oder kleiner als o, das heißt ob u ein Maximum oder Minimum ist, und zwar ist

423. $\begin{cases} \text{u ein Maximum wenn } \delta^2 u \text{ negativ} \\ \text{und ein Minimum wenn } \delta^2 u \text{ positiv ist.} \end{cases}$

Alles dieses kommt mit der gewöhnlichen Theorie der Maxima und Minima überein, allein es ist vielleicht nicht überflüssig, sich ihrer hier zu erinnern, weil es auf die Anwendung auf Größen δu, $\delta^2 u \ldots$ ankommt, die in den gewöhnlichen Fällen nicht vorkommen.

263.

Die Gleichung $\delta u = o$ ist also die Bedingung für die Existenz eines größten oder kleinsten Werthes von u, die Größe $\delta^2 u$ entscheidet durch ihr Zeichen, ob der zu $\delta u = o$ gehörige Werth von u ein größter oder kleinster ist, und der Ausdruck u selbst giebt die Größe des Maximi oder Minimi.

Den Werth von u selbst aus v zu finden, nachdem die Verhältnisse zwischen den Größen der Aufgabe aus der Gleichung $\delta u = o$ bestimmt worden, ist eine Aufgabe für die Zurückleitungs-Rechnung, und gehört also nicht hieher. Die Entscheidung aus dem Ausdruck für $\delta^2 u$, ob der Werth von $\delta^2 u$ positiv oder negativ sey, ist gewöhnlich so verwickelt und schwierig, daß man viel leichter an dem Resultate selbst sieht, ob solches einen größten oder kleinsten Werth bedeute. Deshalb mag auch die Untersuchung von $\delta^2 u$, um den Umfang dieser Abhandlung nicht noch mehr auszudehnen, übergangen werden.

Es bleibt also nur die Untersuchung der Gleichung $\delta u = o$ übrig.

264.

Wie oben gefunden, muß allemal erst eine gewisse Bedingungs-Gleichung erfüllt werden, wenn die Größe δu möglich seyn soll, sie mag bedeuten was man will; sie mag gleich Null seyn oder einen andern Werth haben, z. B. wenn $v = \frac{1}{d}u = f(x, y, dy, d^2y \ldots)$ ist, so muß erst die Gleichung

$$\frac{d}{y}v - d\frac{d}{dy}v + d^2\frac{d}{d^2y}v \ldots = 0 \quad (386.)$$

erfüllt werden, wenn δu existiren soll. Dieses u hat alsdann, auf die Grenzen bezogen, folgenden Werth

$$\frac{\delta}{w}\overset{1}{(u)} - \frac{\delta}{w}\overset{0}{(u)}$$

$$= \left(\frac{d}{dy}\overset{1}{v} - d\frac{d}{d^2y}\overset{1}{v} + d^2\frac{d}{d^3y}\overset{1}{v} \ldots\right)\frac{\delta}{x}\overset{1}{y} \quad (387.)$$

$$+ \left(\frac{d}{d^2y}\overset{1}{v} - d\frac{d}{d^3y}\overset{1}{v} \ldots\right)d\frac{\delta}{x}\overset{1}{y}$$

$$+ \left(\frac{d}{d^3y}\overset{1}{v} \ldots\right)d^2\frac{\delta}{x}\overset{1}{y} \ldots$$

$$- \left(\frac{d}{dy}\overset{0}{v} - d\frac{d}{d^2y}\overset{0}{v} + d^2\frac{d}{d^3y}\overset{0}{v} \ldots\right)\frac{\delta}{x}\overset{0}{y}$$

$$- \left(\frac{d}{d^2y}\overset{0}{v} - d\frac{d}{d^3y}\overset{0}{v} \ldots\right)d\frac{\delta}{x}\overset{0}{y}$$

$$- \left(\frac{d}{d^3y}\overset{0}{v} \ldots\right)d^2\frac{\delta}{x}\overset{0}{y} \ldots$$

$$+ \overset{1}{v}\frac{\delta}{w}\overset{1}{x} - \overset{0}{v}\frac{\delta}{w}\overset{0}{x} + \text{Const.}$$

Wird nun die Bedingungs-Gleichung $\frac{d}{y}v - d\frac{d}{dy}v + d^2\frac{d}{d^2y}v \ldots = 0$ von selbst erfüllt, das heißt, ist δu für jedes beliebige Verhältniß zwischen den Größen der Aufgabe möglich, so folgt dieses Verhältniß allerdings erst aus der Gleichung für das Maximum oder Minimum $\frac{\delta}{w}\overset{1}{u} - \frac{\delta}{w}\overset{0}{u} = 0$. Wird hingegen

die Bedingungs-Gleichung $\frac{d}{y}v - d\frac{d}{xy}v + d^2\frac{d}{d^2y}v \ldots = o$ nicht von selbst erfüllt, so bestimmt schon sie das Verhältniß zwischen den Größen der Aufgabe, und das nämliche, aus derselben folgende, für die Existenz von δu nöthige Verhältniß, ist auch das, welches dem Maximum und Minimum entspricht, denn schon bloß deshalb, daß erst das Maximum oder Minimum möglich sey, ist jenes Verhältniß nöthig. Die eigentliche Bedingungs-Gleichung für das Maximum oder Minimum $\frac{\delta}{w}\overset{1}{(u)} - \frac{\delta}{w}\overset{o}{(u)} = o$ bezieht sich dann schon auf ein bestimmtes Verhältniß zwischen den Größen der Aufgabe und folglich bloß auf die Grenzen von u, und dient daher nur noch, den Constanten ihren Werth zu geben, welche bei der Zurückleitung der Gleichungen $\frac{d}{y}v - d\frac{d}{dy}v \ldots = o$ vorkommen, die nöthig ist, um das Verhältniß zwischen den Größen der Aufgabe zu finden, welche sie ausdrückt. Die Verhältnisse zwischen den in der Gleichung $\frac{\delta}{w}\overset{1}{(u)} - \frac{\delta}{w}\overset{o}{(u)} = o$ vorkommenden Variations-Coefficienten und ihren Ableitungen werden, weil sich Alles auf die Grenzen bezieht, nach der Natur der Grenzen selbst bestimmt.

Diese zweifache Bestimmung läßt sich deutlich an einem Beispiel, namentlich an dem einfachsten Beispiel der kürzesten Linie zwischen gegebenen Grenzen, sehen.

Wird nämlich gefragt, welches die kürzeste Linie zwischen gegebenen Grenzen sey, z. B. zwischen zwei gegebenen Curven, so hat die Frage offenbar zwei Theile. Da nämlich eine Linie immer nur zwischen zwei Punkten gezogen werden kann, so ist erstlich die Frage: welches ist überhaupt die kürzeste Linie zwischen zwei beliebigen Punkten? Dann aber: welche Punkte sind es, in den beiden gegebenen Grenz-Curven, zwischen welchen eine Linie jener Art die kürzeste ist, von allen Linien derselben Art, zwischen beliebigen zwei Punkten der Grenzen. Den ersten Theil der Frage beantwortet schon die Bedingungs-

Gleichung $\frac{d}{y}v - d\frac{d}{dy}v + d^2\frac{d}{d^2y}v \ldots = 0$ für die bloße Möglichkeit des Minimi, in sofern sie nicht etwa von selbst erfüllt wird; die zweite Frage beantwortet die Gleichung $\frac{\delta}{w}(\overset{1}{u}) - \frac{\delta}{w}(\overset{0}{u}) = 0$ für die Grenzen.

265.

Enthält die Aufgabe mehrere von den Elementen abhängende Größen und es sind Bedingungs-Gleichungen zwischen diesen Größen im Allgemeinen gegeben, so können dieselben mittelst der willkührlichen Multiplicatoren in Rechnung gebracht werden (VII.). Wären auch noch Bedingungs-Gleichungen zwischen den Größen der Aufgabe, in sofern sie sich auf die Grenzen beziehen, gegeben, so kann man dieselben auf eben die Weise, bei der Gleichung für die Grenzen $\frac{\delta}{w}(\overset{1}{u}) - \frac{\delta}{w}v = 0$, in Rechnung bringen, indem man nämlich ihre Variations-Coefficienten mit willkührlichen Coefficienten multiplicirt und zu der Gleichung für die Grenzen hinzuthut. Z. B. wenn die Bedingungs-Gleichungen $A = 0$, $B = 0 \ldots$ für die Größen der Aufgabe, in sofern sie sich auf die Grenzen beziehen, gegeben wären, so müßte man ihre Variations-Coefficienten $\frac{\delta}{w}(A)$ und $\frac{\delta}{w}(B)$ mit willkührlichen Größen z. B. mit τ und σ multipliciren und zu den Gleichungen für die Grenzen addiren, die alsdann

$$424. \quad \frac{\delta}{w}(\overset{1}{u}) - \frac{\delta}{w}(\overset{0}{u}) + \tau\frac{\delta}{w}(A) + \sigma\frac{\delta}{w}(B) \ldots = 0$$

seyn würde, und in welcher nunmehr, in sofern noch die etwa außerdem Statt findenden Verhältnisse für die Variations-Coefficienten der abhängigen Größen der Aufgabe berücksichtigt sind, die Coefficienten zu diesen Variations-Coefficienten einzeln gleich Null gesetzt werden müssen, weil wegen der eingeführten Bedingungs-Gleichungen die Variations-Coefficienten als von einander unabhängig betrachtet werden können.

266.

Die Aufgabe kann auch verlangen, daß die Größe u nur in sofern ein Maximum oder Minimum zwischen gegebenen Grenzen seyn soll, als die Stammgröße und deren Ableitungen v, v′ . . . zwischen den nämlichen Grenzen bestimmte Werthe haben. Man nennt dergleichen Maxima und Minima relative, während im Gegentheil die vorigen, absolute heißen. Ein Beispiel eines solchen relativen Maximi liegt in der Aufgabe, diejenige Linie von gegebener Länge zu finden, welche mit einer andern gegebenen Linie den größten Raum einschließt. Denn hier soll der eingeschlossene Raum nur in sofern ein Maximum seyn, als die einschließende Linie eine gegebene Länge hat.

Solche Aufgaben bedürfen keiner besondern Behandlung, sondern sind in den vorigen enthalten; die Bedingung nämlich, daß die Stammgrößen der gegebenen Größen v, v′ . . . bestimmte Werthe haben sollen, schreiben der Rechnung nichts weiter vor, als gewöhnliche Bedingungs-Gleichungen, die, wie immer, durch die unbestimmten Multiplicatoren in Rechnung gebracht werden können.

Es werde z. B. die Stammgröße der gegebenen Größe V durch U bezeichnet, so daß $V = dU$, so ist $dU - V = o$; die Bedingung aber ist, daß die Größe U zwischen den gegebenen Grenzen der Aufgabe, also die Größe $\overset{I}{U} - \overset{o}{U}$ einen bestimmten Werth haben soll, so daß also $\delta\overset{I}{U} - \delta\overset{o}{U} = o$. Man behandle, um diese Bedingung in Rechnung zu bringen, die Gleichung $dU - V = o$, von welcher sie ausgedrückt wird, wie jede andere Bedingungs-Gleichung, das heißt, man nehme davon die erste variirte Gleichung $\delta dU - \delta V = o$, multiplicire sie mit einem unbestimmten Coefficienten ν, und addire das entstehende Product $\nu(\delta dU - \delta V)$, welches ebenfalls $= o$ ist, zu dem Variations-Coefficienten δv der Ableitung v, deren Stammgröße u das relative Maximum oder Minimum seyn soll. Hierdurch geht δv in

425. $\delta v + \nu(\delta dU - \delta V)$

über. Das Glied $\nu \delta dU$, oder $\nu d\delta U$, ist nichts anders, als

$d(\nu\delta U) - d\nu\delta U$. Da nun die Glieder außerhalb des Zeichens d Null seyn müssen, damit die Stammgröße δu zu δv existire, die Größe δU aber unabhängig bleiben muß, so ist ihr Coefficient $\delta\nu = 0$, und folglich $\nu =$ Const. $= a$. Der Rest der Größe $\nu d\delta U$, nämlich $d(\nu\delta U)$, ist eine vollständige Ableitung und giebt also für δu den Theil $\nu\delta u$ oder $a\delta U$, der, auf die Grenzen bezogen, die Größe $a(\delta\overset{1}{U} - \delta\overset{0}{U})$ hat. Nun soll aber nach der anfänglichen Bedingung $\overset{1}{U} - \overset{0}{U}$ einen bestimmten Werth haben. Also sind die Variations-Coefficienten von $\overset{1}{U} - \overset{0}{U}$ gleich Null, folglich ist $\delta\overset{1}{U} - \delta\overset{0}{U}$ und folglich auch der Theil von δu der von dem Gliede $\nu\delta d U$ herkommt, gleich Null, so daß also dieses Glied auf den Werth von δu keinen Einfluß hat.

Es bleibt also noch das Glied $-\nu\delta V$ übrig, welches, weil ν eine Constante a seyn muß, gleich $-a\delta V$ ist, so daß δv durch die Bedingung der Aufgabe eigentlich nur in

426. $\delta v - a\delta V$

oder, was dasselbe ist, v in

427. $v - aV$

übergeht. Die relativen Maxima und Minima können also als absolute oder unbedingte behandelt werden, sobald man die Größe V, deren Stammgröße u, zwischen den Grenzen der Maxima oder Minima, einen bestimmten Werth haben soll, mit einer beliebigen Constante a multiplicirt, und von der Größe v, deren Stammgröße u das Maximum oder Minimum seyn soll, abgezogen hat. Dadurch bringt man die Bedingung in Rechnung, und darf alsdann nur das absolute Maximum oder Minimum zu der Größe $v - aV$ suchen.

267.

Es können auch noch viele andere verwickeltere Fälle, als die bisher angenommenen, vorkommen, z. B. die Ableitung v, deren Stammgröße der Gegenstand der Aufgabe ist, kann, außer den Elementen und den aus ihnen zusammengesetzten Größen, noch andere Stammgrößen enthalten, die nur

durch

durch ihre Ableitungen gegeben sind, z. B. von der Form seyn:

$$v = f(x, y, dy, d^2y \ldots p)$$

wo p eine Größe von der Form

$$\frac{1}{d} \varphi (x, y, dy, d^2y \ldots)$$

ist; auch kann die Ableitung v nicht unmittelbar, sondern nur durch eine Gleichung, selbst wieder mit Ableitungen und Stammgrößen, gegeben seyn u. s. w. Ich übergehe, um mich nicht zu weit auszudehnen, diese verwickelteren Fälle, da ich keine vollständige Abhandlung über die Variations-Rechnung schreiben will, sondern nur die Principien recht deutlich vorzutragen beabsichtige, deren Anwendung auf die verwickelteren Fälle übrigens keine solche Schwierigkeiten findet, die etwa auf die Principien zurückwirkten.

Das Bisherige enthält die Theorie der Variations-Rechnung in den einfachsten Fällen, und es sollen nun einige darauf passende Beispiele folgen.

IX. Beispiele.

Erstes Beispiel.

Von der kürzesten Linie in der Ebene zwischen zwei gegebenen Punkten.

268.

Der allgemeine Ausdruck der ersten Ableitung der Länge einer Linie, deren Coordinaten x und y sind, ist bekanntlich $\sqrt{(1 + dy^2)}$. Also ist hier

428. $v = \sqrt{(1 + dy^2)}$

denn die unbekannte Stammgröße u von v, welche die Länge der Linie ausdrücken würde, soll ein Maximum seyn.

Der Ausdruck $v = \sqrt{(1 + dy^2)}$ ist in dem allgemeinen Ausdruck $y = f(x, y, dy, d^2y \ldots)$ enthalten; also ist hier die Bedingungs-Gleichung für die Existenz von δu diejenige (385.) nämlich: $\frac{d}{y} v - d \frac{d}{dy} v + d^2 \frac{d}{d^2y} v \ldots = 0$, und nachdem solche erfüllt worden ist

$$\frac{\delta}{x}\overset{1}{u} - \frac{\delta}{x}\overset{0}{u} = 0$$

$$= \left(\frac{d}{dy}\overset{1}{v} - d\frac{d}{d^2y}\overset{1}{v}\ldots\right)\frac{\delta}{x}\overset{1}{y} + \left(\frac{d}{d^2y}\overset{1}{v}\ldots\right)d\frac{\delta}{x}\overset{1}{y}\ldots$$

$$- \left(\frac{d}{dy}\overset{0}{v} - d\frac{d}{d^2y}\overset{0}{v}\ldots\right)\frac{\delta}{x}\overset{0}{y} + \left(\frac{d}{d^2y}\overset{0}{v}\ldots\right)d\frac{\delta}{x}\overset{0}{y}\ldots \quad (387.)$$

Hier ist nun $\frac{d}{y}v = 0$, $\frac{d}{dy}v = \frac{dy}{\sqrt{(1+dy^2)}}\ \frac{d}{d^2y}v$ ꝛc. $= 0$, also giebt die Bedingungs-Gleichung hier $-d\frac{dy}{\sqrt{(1+dy^2)}} = 0$ und die Gleichung der Grenzen ist

$$\frac{\delta}{x}\overset{1}{u} - \frac{\delta}{x}\overset{0}{u} = \frac{d\overset{1}{y}}{\sqrt{(1+d\overset{1}{y}{}^2)}}\frac{\delta}{x}\overset{1}{y} - \frac{d\overset{0}{y}}{\sqrt{(1+d\overset{0}{y}{}^2)}}\frac{\delta}{x}\overset{0}{y} = 0.$$ Aus

$-d\left(\frac{dy}{\sqrt{(1+dy^2)}}\right) = 0$ folgt $\frac{dy}{\sqrt{(1+dy^2)}} = \text{Const.} = a$, also $\frac{\sqrt{(1+dy^2)}}{dy} = \frac{1}{a}$ und $\frac{1+dy^2}{dy^2} = \frac{1}{dy^2} + 1 = \frac{1}{a^2}$ oder $\frac{1}{dy^2} = \frac{1}{a^2} - 1 = \frac{1-a^2}{a^2}$ oder $dy = \sqrt{\frac{a^2}{1-a^2}} = \text{Const.} = b$; also $y = bx + \text{Const.}$ oder

429. $y = bx + c.$

Diese Gleichung gehört der graden Linie, also ist nur die grade Linie des Minimums fähig. Die Coefficienten b und c können auf die bekannte Weise nach der Lage der gegebenen Grenz-Punkte bestimmt werden. Da nun ferner die beiden Grenzen der Linie feste Punkte seyn sollten, so sind die Ordinaten $\overset{1}{y}$ und $\overset{0}{y}$, welche zu den Grenzen gehören, unveränderlich und folglich ihre Variations-Coefficienten $\frac{\delta}{x}\overset{1}{y}$ und $\frac{\delta}{x}\overset{0}{y}$ gleich Null, also wird die Gleichung der Grenzen $\frac{\delta}{x}\overset{1}{u} - \frac{\delta}{x}\overset{0}{u}$ von selbst erfüllt und giebt folglich nichts weiter, wie es auch seyn muß, weil die Aufgabe durch die Bestimmung der Gestalt der Linie völlig aufgelöset ist.

Zweites Beispiel.

Von der kürzesten Linie in der Ebene zwischen Perpendikeln auf die Abcissen-Axe.

269.

Die Ableitung v, deren Stammgröße u ein Minimum seyn soll, ist dieselbe, wie in der vorigen Aufgabe; also bleibt Alles, was daraus folgt; nur sind jetzt die Grenzen der Linien nur noch in Beziehung auf x unveränderlich, nicht aber mehr in Beziehung auf y. Obgleich also die Veränderung der Grenz-Punkte der Linie auf x keinen Einfluß hat, und es also noch nicht nöthig ist, x als von einer neuen Größe w abhängig zu betrachten, so sind doch nicht mehr $\frac{\delta}{x}\overset{1}{y}$ und $\frac{\delta}{x}\overset{0}{y}$ gleich Null, sondern vielmehr willkührlich, denn man kann die Grenz-Punkte der Linie in den Perpendikeln annehmen, wo man will. Also wird jetzt die Gleichung für die Grenzen nicht mehr von selbst erfüllt, sondern giebt, weil $\frac{dy}{\sqrt{(1+dy^2)}}$ allgemein, also auch für die Grenzen, $=$ o war,

$$430.\quad a\left(\frac{\delta}{x}\overset{1}{y}-\frac{\delta}{x}\overset{0}{y}\right)=0$$

woraus folgt, $a = 0$. Nun war $\sqrt{\left(\frac{a^2}{1-a^2}\right)} = b$, also ist auch $b = 0$ und die Gleichung für die grade Linie $y = bx + c$ geht über in

$$431.\quad y = c$$

woraus folgt, daß die kürzeste Linie zwischen den Perpendikeln, in willkührlicher Entfernung c von der Abcissen-Axe, mit derselben parallel, oder auf die Perpendikel selbst perpendikulär seyn muß, wie gehörig.

Drittes Beispiel.

Von der kürzesten Linie zwischen zwei gegebenen Linien in einer Ebene.

270.

Die Ableitung v ist immer noch die nämliche, wie in den beiden vorigen Beispielen, aber da die Grenzen weder nach

der Abciſſe, wie im zweiten Beiſpiel, noch nach der Ordinate mehr beſtimmt ſind, ſo hat der Uebergang von einer Linie zur andern auf ſie Einfluß; folglich muß jetzt x als abhängig von einer neuen Größe w betrachtet werden. Dieſer Umſtand ändert zwar nichts an der Bedingungs-Gleichung für die Exiſtenz von $\int \delta u$, und folglich auch an der Gleichung der Linie nichts die daraus folgt, vielmehr iſt die Linie nach wie vor eine grade, wohl aber an dem Werth von δu, zu welchem die Größe $v \frac{\delta}{w} x$ hinzukommt.

Da $v = \sqrt{(1 + dy^2)}$ ſo iſt dieſe Größe $= \sqrt{(1 + \overset{1}{d}y^2)} . \frac{\delta}{w} x$ und folglich jetzt $\delta u = \frac{dy}{\sqrt{(1 + dy^2)}} . \frac{\delta}{w} y + \sqrt{(1 + dy^2)} \frac{\delta}{w} x$. Da es darauf ankommt, die Werthe der Variations-Coefficienten der Ordinaten für die Grenzen, aus den Gleichungen derſelben zu nehmen, wobei nicht ſowohl die Größe $\frac{\delta}{x} y$ als die Größe $\frac{\delta}{w} (y)$ vorkommt, ſo iſt es nöthig in dem Ausdruck für δu die Größe $\frac{\delta}{w} (y)$ ſtatt $\frac{\delta}{x} y$ einzuführen.

Es iſt $\frac{\delta}{w} y = \frac{\delta}{w} (y) = dy \frac{\delta}{w} x$ (376.) alſo iſt

$$\delta u = \frac{dy}{\sqrt{(1+dy^2)}} \left[\frac{\delta}{w} (y) - dy \frac{\delta}{w} x \right] + \sqrt{(1+dy^2} \frac{\delta}{w} x$$

$$\text{oder } \delta u = \frac{dy \frac{\delta}{w} (y)}{\sqrt{(1+dy^2)}} - \frac{dy^2 \frac{\delta}{w} x}{\sqrt{(1+dy^2)}} + \sqrt{(1+dy^2)} \frac{\delta}{w} x$$

$$\text{oder } \quad u = \frac{dy \frac{\delta}{w} (y) + \frac{\delta}{w} x}{\sqrt{(1+dy^2)}}$$

Dieſes auf die Grenzen bezogen, giebt folgende Gleichung für die Grenzen

$$\overset{1}{\delta u} - \overset{0}{\delta u} = \frac{\overset{1}{dy} \frac{\delta}{w} \overset{1}{(y)} + \frac{\delta}{w} \overset{1}{x}}{\sqrt{(1+\overset{1}{dy^2})}} - \frac{\overset{0}{dy} \frac{\delta}{w} \overset{0}{(y)} + \frac{\delta}{w} \overset{0}{x}}{\sqrt{(1+\overset{0}{dy^2})}}$$

Setzt man daß die Grenzen von einander unabhängig sind, das heißt, daß die Aufgabe bleiben soll, die Grenzen mögen einzeln seyn welche sie wollen und beliebig gegen einander liegen, so ist einzeln $\delta \overset{1}{u} = 0$ und $\delta \overset{0}{u} = 0$ also

431. $\overset{1}{dy} \frac{\delta}{w} (\overset{1}{y}) + \frac{\delta}{w} \overset{1}{x} = 0$ und $\overset{0}{dy} \frac{\delta}{w} (\overset{0}{y}) + \frac{\delta}{w} \overset{0}{x} = 0$

Fig. 20. Nun sey die Gleichung der ersten Grenz-Linie DE folgende: $\varphi\,(xy) = 0$, so müssen die Verhältnisse zwischen den Variations-Coefficienten $\frac{\delta}{w} (\overset{0}{y})$ und $\frac{\delta}{w} \overset{0}{x}$ der gesuchten Linie BC aus der Gleichung $\varphi xy = 0$ genommen werden, denn da der Endpunkt der Linie BC immer in der Linie DE liegt, welche auch die Linie BC seyn mag, so hängt nothwendig das Verhältniß zwischen den Variations-Coefficienten $\frac{\delta}{w} (\overset{1}{y})$ und $\frac{\delta}{w} (\overset{0}{x})$ für die Linie BC, die sich auf den Uebergang von einer Linie BC zur andern beziehen, von der Gleichung $\varphi\,(x, y) = 0$ ab. Diese Gleichung gilt nun, weil immer von den Endpunkten der Linie BC die Rede ist, auch wenn man darin x und y variirt, denn es wird dadurch nichts ausgedrückt, als der Uebergang des Endpunkts einer Linie BC, zu dem Endpunkte einer andern. Also findet auch die variirte Gleichung

$$\frac{d}{x} \varphi\,(xy) \frac{\delta}{w} x + \frac{d}{y} \varphi\,(xy) \frac{\delta}{w} (y) = 0$$

Statt, die sich wie gesagt auf die Linie BC bezieht. Zugleich findet wie immer die Ableitungs-Gleichung

$$\frac{d}{x} \varphi\,(xy) + \frac{d}{y} \varphi\,(xy)\, dy = 0$$

Statt, die sich auf die Linie DE bezieht. Multiplicirt man die letzte mit $\frac{\delta}{w} x$ und zieht sie von der ersten ab, so erhält

$$\frac{d}{y} \varphi\,(xy) \frac{\delta}{w} (y) - \frac{d}{y} \varphi\,(xy)\, dy \frac{\delta}{w} x = 0 \text{ oder}$$

432. $\frac{\delta}{w} (y) - dy \frac{\delta}{w} x = 0$

welches die Bedingungs-Gleichung für das Verhältniß der Variations-Coefficienten $\frac{\delta}{w}(y)$ und $\frac{\delta}{w}x$ ist, die aus der Natur der Linie DE folgt.

Die Variations-Coefficienten $\frac{\delta}{w}(y)$ und $\frac{\delta}{w}x$ in dieser Gleichung beziehen sich auf die Linie BC, die allein zu einer andern Linie ihrer Art übergehen soll, während DE die nämliche bleibt; hingegen dy bezieht sich, weil es aus der Gleichung für DE genommen ist, auf DE. Um dieses dy von demjenigen dy zu unterscheiden, welches für die Linie BC vorgekommen ist, schließe man es in Klammern, und bezeichne auch, um die erste Grenze anzudeuten, Alles mit o, so ist nunmehr die Bedingungs-Gleichung (432.), genauer bestimmt, folgende:

$$433.\quad \frac{\delta}{w}\dot{(y)} - (\mathring{dy})\frac{\delta}{w}\mathring{x} = 0.$$

Nun war die Gleichung für die erste Grenze, die aus $\delta\alpha = 0$, also aus der Natur der Aufgabe folgt,

$$434.\quad \mathring{dy}\,\frac{\delta}{w}\mathring{(y)} + \frac{\delta}{w}\mathring{x} = 0$$

In diese Gleichung müssen die Verhältnisse zwischen den Variations-Coefficienten, die aus der Form der Linie DE folgen, und die vorhin gefunden und durch die Gleichung (433.) ausgedrückt wurden, eingeführt werden. Multiplicirt man daher die Gleichung (433.) mit $\mathring{dy}$ und zieht sie von (433.) ab, so erhält man

$$\frac{\delta}{w}\mathring{x} + \mathring{dy}\,(\mathring{dy})\,\frac{\delta}{w}\mathring{x} = 0 \text{ oder}$$

$$435.\quad 1 + \mathring{dy}\,(\mathring{dy}) = 0$$

zur Bestimmung des Endpunkts B der Linie BC.

Bekanntlich drückt dy die Tangente des Winkels aus, welchen die Tangente einer Curve mit der Absciſſen-Axe macht. Also sind $\mathring{dy}$ und $(\dot{dy})$ die Tangenten der Winkel, welche die Linien BC und DE, beide im Grenzpunkte = B, mit der Absciſſen-Axe machen. Der Unterschied dieser Winkel ist

der Winkel, welchen die Tangenten unter sich machen. Die trigonometrische Tangente dieses Unterschiedes aber ist, wenn die beiden Winkel α und β heißen, tang. $(\alpha - \beta) = \frac{tg.\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg.\,\alpha\,tg\,\beta}$, also, weil tg. $\alpha = d\mathring{y}$, tg. $\beta = (d\mathring{y})$ ist, $= \frac{d\mathring{y} - (d\mathring{y})}{1 + d\mathring{y}\,(d\mathring{y})}$. Nun ist zufolge (405.) der Nenner dieses Ausdrucks $1 + d\mathring{y}\,(d\mathring{y}) = 0$, also ist tg. $(\alpha - \beta) = \infty$ und folglich $\alpha - \beta$ gleich einem rechten Winkel, das heißt: die Linie BC muß, um die kürzeste von ED ab zu seyn, die Linie DE unter einem rechten Winkel schneiden.

Genau dasselbe würde man für die andere Linie FG finden. Also ist die kürzeste Linie zwischen den beiden Linien ED und FG diejenige grade, welche die beiden Linien ED und FG unter rechten Winkel schneidet.

Viertes Beispiel.

Von der Linie in der Ebene von gegebener Länge, welche mit einer andern gegebenen Linie den größten Raum einschließt.

271.

Dieser Fall ist der eines bedingten oder relativen Maximums, denn der eingeschlossene Raum ist nur in sofern ein Maximum, als die Länge der Linie eine bestimmte Größe hat. Hier also findet die Rechnung (§. 266.) Anwendung.

Die Länge einer Linie ist allgemein

$$\frac{1}{d}\sqrt{(1 + dy^2)}$$

Fig. 21. die Fläche AMP, welche eine Linie mit den Coordinaten einschließt, ist allgemein

$$\frac{1}{d}\,y$$

die Fläche APN, welche die gegebene Linie ADB mit den nämlichen Coordinaten einschließt, ist, wenn PN $= \varphi x$,

$$\frac{1}{d}\,\varphi x$$

also ist hier die Größe, welche ein Maximum seyn soll, $u = \frac{1}{d}\,y + \frac{1}{d}\,\varphi x$ und die Größe, welche zwischen bestimmten Grenzen einen bestimmten Werth haben soll, $U = \frac{1}{d}\sqrt{(1+y^2)}$ folglich ist in (§. 266.)

$$v = y + \varphi x \text{ und } V = \sqrt{(1 + dy^2)}$$

und folglich daselbst,

$$436 \quad v - a\,V = y + \varphi x - a\sqrt{(1 + dy^2)} = v$$

diejenige Größe, die so behandelt werden kann, als wenn ein absolutes Maximum Statt fände.

Die Bedingungs-Gleichung für die Existenz des Maximums

$$\frac{d}{y}\,v_1 - d\,\frac{d}{dy}v_1 + d^2\,\frac{d}{d^2y}\,v_1 \ldots = 0$$

giebt, weil $\frac{d}{y}\,v_1 = 1$, $\frac{d}{dy}\,v_1 = -\frac{a\,dy}{\sqrt{(1+dy^2)}}\;\frac{d}{d^2y}\,v_1 \ldots = 0$ ist,

$$1 + d\,\frac{a\,dy}{\sqrt{(1+dy^2)}} = 0$$

Hiervon ist die Stammgleichung

$$x + \frac{a\,dy}{\sqrt{(1+dy^2)}} = \text{Const.} = b.$$

Daraus folgt $\frac{a^2\,dy^2}{1+dy^2} = (b-x)^2$ oder $\frac{1+dy^2}{dy^2} = \frac{a^2}{(b-x)^2}$ oder $\frac{1}{dy^2} = \frac{a^2}{(b-x)^2} - 1 = \frac{a^2 - (b-x)^2}{(b-x)^2}$ also

$$dy = \frac{b-x}{\sqrt{(a^2 - (b-x)^2)}}$$

Hiervon ist die Stammgleichung

$$y = \sqrt{(a^2 - (b-x)^2)} + \text{Const.} = \sqrt{(a^2 - (b-x)^2)} + c;$$

also ist die Gleichung der Linie, welche die Bedingung der Aufgabe erfüllt

$$437. \quad (y - c)^2 = a^2 - (b - x)^2$$

Diese Gleichung gehört einem Kreise zu, dessen Halbmesser a ist und dessen Coordinaten y — c oder c — y und b — x oder x — b sind. Da für den Anfangs-Punkt der Abcisse x und y, = o sind, so ist $c^2 = a^2 - b^2$ oder $a^2 = b^2 + c^2$, also sind c und b die Coordinaten des Anfangs-Punkts, oder des Durchschnitts der Curve mit der Abcissen-Axe.

272.

Die Durchschnitts-Punkte A, B sind nicht bestimmt, also sind die Grenzen veränderlich. Folglich muß man x als abhängig betrachten.

Deshalb ist die Gleichung für die Grenzen

$$438\left\{\begin{aligned}&\frac{\delta}{w}\overset{1}{(u)} - \frac{\delta}{w}\overset{0}{(u)} = \overset{1}{v_1}\,\frac{\delta}{w}\overset{1}{x} - \overset{0}{v_1}\,\frac{\delta}{w}\overset{0}{x}\\ &\qquad + \left(\frac{d}{dy}\overset{1}{v_1} - d\,\frac{d}{d^2y}\overset{1}{v_1}\ldots\right)\left(\frac{\delta}{w}\overset{1}{(y)} - \overset{1}{dy}\,\frac{\delta}{w}\overset{1}{x}\right)\ldots\\ &\qquad - \left(\frac{d}{dy}\overset{0}{v_1} - d\,\frac{d}{d^2y}\overset{0}{v_1}\ldots\right)\left(\frac{\delta}{w}\overset{0}{(y)} - \overset{0}{dy}\,\frac{\delta}{w}\overset{0}{x}\right)\ldots\end{aligned}\right.$$

Es ist $v = y + \varphi x - a\sqrt{(1 + dy^2)}$ und $\frac{d}{dy}v_1 = \frac{-ady}{\sqrt{(1+dy^2)}}$ also ist

$$439.\quad \frac{\delta}{w}(u) = [y + \varphi x - a\sqrt{(1+dy^2)}]\,\frac{\delta}{w}x - \frac{ady}{\sqrt{(1+dy^2)}}\left(\frac{\delta}{w}\overset{1}{(y)} - dy\,\frac{\delta}{w}x\right)$$

Die Gleichung der Linie ADB sey

$$440.\quad f\,xy = o$$

so ist wie in (§. 270.) die variirte Gleichung dieser Linie

$$\frac{d}{x}f\,(xy)\,\frac{\delta}{w}x + \frac{d}{y}f\,(xy)\,\frac{\delta}{w}(y) = o.$$

Die Ableitungs-Gleichung der Linie ADB ist

$$\frac{d}{x}f\,(xy) + \frac{d}{y}f\,(xy)\,dy = o.$$

Multiplicirt man die letzte mit $\frac{\delta}{w}x$ und zieht sie von der ersten ab, so erhält man

$$\frac{d}{w} f(xy) \frac{\delta}{w}(y) - \frac{d}{y} f(xy)\, dy \frac{\delta}{w} x = 0 \text{ oder}$$

$$441.\quad \frac{\delta}{w}(y) = dy \frac{\delta}{w} x$$

welches die Bedingungs-Gleichung für das Verhältniß der Variations-Coefficienten $\frac{\delta}{w}(y)$ und $\frac{\delta}{w} x$ ist. Eben wie in (§. 270.) und aus denselben Gründen bezieht sich dy auf die Linie ADB, nicht auf ACB, und muß also besonders bezeichnet werden, z. B. durch Einschließen in Klammern. Also ist eigentlich

$$442.\quad \frac{\delta}{w}(y) = (dy) \frac{\delta}{w} x$$

Setzt man dieses Verhältniß zwischen $\frac{\delta}{w}(y)$ und $\frac{\delta}{w} x$ in den Ausdruck von $\frac{\delta}{w}(u)$ (439.) so erhält man

$$\frac{\delta}{w}(u) = \left[y + \varphi x - a\sqrt{(1 + dy^2)} - \frac{ady\,(dy)}{\sqrt{(1+dy^2)}}((dy) - dy)\right] \frac{\delta}{w} x$$

oder

$$\frac{\delta}{w}(u) = \left[y + \varphi x - a\sqrt{(1 + dy^2)} - \frac{ady\,(dy)}{\sqrt{(1+dy^2)}} + \frac{ady^2}{\sqrt{(1+dy^2)}}\right] \frac{\delta}{w} x,$$

oder

$$\frac{\delta}{w}(u) = \left[y + \varphi x - \frac{a}{\sqrt{(1+dy^2)}} - \frac{ady\,(dy)}{\sqrt{(1+dy^2)}}\right] \frac{\delta}{w} x \text{ oder}$$

$$\frac{\delta}{w}(u) = \left[y + \varphi x - \frac{a\,(1 + dy\,(dy))}{\sqrt{(1+dy^2)}}\right] \frac{\delta}{w} x$$

welches für jede der beiden Grenzen A und B gilt. Also ist die Gleichung für die Grenzen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta}{w}(\overset{1}{u}) - \frac{\delta}{w}(\overset{0}{u}) = \left(\overset{1}{y} + \varphi\overset{1}{x} - \frac{a\,(1 + \overset{1}{dy}\,(\overset{1}{dy}))}{\sqrt{(1+\overset{1}{dy}{}^2)}}\right) \frac{\delta}{w} \overset{1}{x} \\ - \left(\overset{0}{y} + \varphi\overset{0}{x} - \frac{a\,(1 + \overset{0}{dy}\,(\overset{0}{dy}))}{\sqrt{(1+\overset{0}{dy}{}^2)}}\right) \frac{\delta}{w} \overset{0}{x} \end{aligned}\right\} = 0$$

Die Größe $y + \varphi x$ zeigt die Länge der Ordinate MN an.

Diese ist für die Grenzen = o, also ist die Gleichung für die Grenzen

$$443. \quad \frac{1+\overset{0}{dy}\,(\overset{0}{dy})}{\sqrt{(1+\overset{0}{dy}{}^2)}}\,\frac{\delta}{w}\,\overset{0}{x} - \frac{1+\overset{1}{dy}\,(\overset{1}{dy})}{\sqrt{(1+\overset{1}{dy}{}^2)}}\,\frac{\delta}{w}\,\overset{1}{x} = 0$$

Die Größe $\frac{\delta}{w}x$ kann aus der gegebenen Gleichung der Linie ADB nicht bestimmt werden; denn wenn diese Gleichung, wie oben, $f(xy) = 0$ ist, so ist der erste Variations-Coefficient davon

$$\frac{d}{x}f(xy)\,\frac{\delta}{w}x + \frac{d}{y}f(xy)\,\frac{d}{x}y\,\frac{\delta}{w}x = 0 \text{ oder}$$

$$\left(\frac{d}{x}f(xy) + \frac{d}{y}f(xy)\,\frac{d}{x}y\right)\frac{\delta}{w}x = 0$$

woraus folgt, daß $\frac{\delta}{w}x$ unbestimmt bleibt. Also ist $\frac{\delta}{w}x$ überall, und folglich auch an den Grenzen, willkührlich. Folglich sind in (443.) die Coefficienten zu $\frac{\delta}{w}\overset{0}{x}$ und $\frac{\delta}{w}\overset{1}{x}$ einzeln gleich Null. Mithin ist

$$444. \quad 1 + \overset{0}{dy}\,(\overset{0}{dy}) = 0 \text{ und } 1 + \overset{1}{dy}\,(\overset{1}{dy}) = 0$$

Daraus folgt, wie in (§. 270), daß die gesuchte Linie ACB mit beiden Enden auf der gegebenen Linie ADB senkrecht stehen muß.

Die Linie von gegebener Länge, welche mit einer gegebenen Linie den größten Raum einschließt, ist also ein Kreisbogen, der auf der gegebenen Linie an beiden Enden senkrecht steht.

Ist die gegebene Linie eine grade, so muß dieser Kreisbogen der Umfang eines Halbkreises seyn. Soll also eine Linie von gegebener Länge mit einer graden den größten Raum einschließen, so muß sie in den Umfang eines Halbkreises gebogen werden.

Ist auch die Länge der graden Linie gegeben, so findet das, was die Gleichung für die Grenzen giebt, nicht mehr Statt, weil alsdann die Grenzen bestimmt sind, und folglich die Grenzengleichung von selbst erfüllt wird. Also bleibt nur die Bestimmung für die Gestalt der Linie im Allgemeinen. Die Linie also von gegebener Länge, welche mit einer graden

und gegebenen Linie den größten Raum einschließt, ist ein Kreisbogen durch die Endpunkte.

Die Länge der gegebenen graden Linie kann auch o seyn. In diesem Fall ist ACB ein ganzer Kreisumfang, der also unter allen Linien den größesten Raum einschließt.

Fünftes Beispiel.

Von der Linie, die mit ihrer Evolute und den Halbmessern der Krümmung an den Enden, unter allen über gleichen Abcissen, den größten oder kleinsten Raum einschließt.

273.

Fig. 22. AN sey die gesuchte Linie, deren Coordinaten $AP = x$, $PM = y$ seyn sollen. AL sey ihre Evolute. Die Evolute ist der geometrische Ort der Endpunkte von den Halbmessern MK, ML etc. der Krümmung der Line AN. Die Fläche AMK sey $= P$, die Länge $AM = s$, der Halbmesser der Krümmuug $MK = r$, so ist bekanntlich

$$dF = rds \text{ und } r = -\frac{ds^3}{d^2y}, \text{ also}$$

$$445. \quad dF = -\frac{ds^4}{d^2y}$$

Die Bedingung, daß die Abcisse x eine gegebene Größe haben soll, giebt $U = x = \frac{1}{d}\, 1$ und $V = 1$.

Da nun die Fläche F ein Maximum oder Minimum seyn soll, so ist die Größe, die als v behandelt werden kann, $v_1 = v - aV$ oder

$$446. \quad v_1 = -\frac{ds^4}{d^2y} - a.$$

Da $ds^2 = 1 + dy^2$, so könnte man v ganz in y ausdrükken, nämlich $v = -\frac{(1 + dy^2)^2}{d^2y} - a$. Wollte man hierauf die Bedingungs-Gleichung für die Existenz des Maximums oder Minimums $\frac{d}{y} v - d\frac{d}{dy} v + d^2 \frac{d}{d^2y} v \ldots = 0$ anwenden, so wäre

$$\frac{d}{dy}v = -\frac{2(1+dy^2)dy}{d^2y}$$

$$\frac{d}{d^2y}v = \frac{(1+dy^2)^2}{d^2y^2}$$

und es ist leicht zu sehen, daß man eine Ableitungs-Gleichung von der vierten Ordnung erhalten würde; denn $d\frac{d}{d^2y}v$ würde schon d^3y und folglich $d^2\frac{d}{d^2y}v$ sogar d^4y enthalten. Die Rechnung würde also auf diesem Wege weitläuftig seyn. Um sie abzukürzen, kann man wie folgt verfahren.

Statt nämlich y zu derjenigen Größe zu wählen, deren Abhängigkeit von x gesucht wird, nehme man dazu die Größe ds, die eben sowohl von x abhängt als y, so ist, wegen $dy = \sqrt{(ds^2-1)}$, $d^2y = \frac{ds\,d^2s}{\sqrt{(ds^2-1)}}$, also ist alsdann

$$v = -ds^4 - \frac{ds\,d^2s}{\sqrt{(ds^2-1)}} - a = -\frac{ds^3\sqrt{(ds^2-1)}}{d^2s} - a$$

oder wenn $ds = p$ heißt:

$$447.\quad v = -\frac{p^3\sqrt{(p^2-1)}}{dp} - a.$$

Man könnte auch dy statt y zur abhängigen Größe nehmen, allein die Rechnung ist nicht so einfach als die mit ds.

Die Bedingungs-Gleichung für die Existenz des Maximums oder Minimums ist nun

$$\frac{d}{p}v - d\frac{d}{dp}v + d^2\frac{d}{d^2p}v \ldots = 0$$

Es ist

$$\frac{d}{p}v = -\frac{3p^2\sqrt{(p^2-1)}}{dp} - \frac{p^4}{dp\sqrt{(p^2-1)}} = -\frac{4p^4-3p^2}{dp\sqrt{(p^2-1)}}$$

$$\frac{d}{dp}v = \frac{p^3\sqrt{(p^2-1)}}{dp^2},\ \text{also}$$

$$d\frac{d}{dp}v = \frac{3p^2\sqrt{(p^2-1)}}{dp} + \frac{p^4}{dp\sqrt{(p^2-1)}} - \frac{2p^3d^2p\sqrt{(p^2-1)}}{dp^3}$$

$$\text{oder}\quad d\frac{d}{dp}v = \frac{p^4-3p^2}{dp\sqrt{(p^2-1)}} - \frac{2p^3d^2p\sqrt{(p^2-1)}}{dp^3}$$

Die übrigen Glieder $d^3 \frac{d}{d^3 p} v$ etc. sind o. Also ist die Bedingungs-Gleichung

$$-2 \frac{4p^4 - 3p^2}{dp \sqrt{(p^2 - 1)}} + 2 \frac{p^3 d^2 p \sqrt{(p^2 - 1)}}{dp^3} = 0, \text{ oder}$$

$$\frac{pd^2 p \sqrt{(p^2 - 1)}}{dp^2} - \frac{4p^2 - 3}{\sqrt{(p^2 - 1)}} = 0, \text{ oder}$$

$$p\,(p^2 - 1)\, d^2 p = dp^2\,(4p^2 - 3) \text{ oder}$$

448. $$\frac{d^2 p}{dp} = \frac{4p^2 - 3}{p(p^2 - 1)} \cdot dp = \frac{4pdp}{p^2 - 1} - \frac{3dp}{p(p^2 - 1)}$$

Man setze $\frac{1}{p(p^2 - 1)} = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p - 1} + \frac{\gamma}{p + 1}$ so ist

$$\frac{1}{p(p^2 - 1)} = \frac{\alpha\,(p^2 - 1) + \beta\,(p^2 + p) + \gamma\,(p^2 - p)}{p\,(p^2 - 1)} \text{ also}$$

$1 = \alpha p^2 - \alpha + \beta p^2 + \beta p + \gamma p^2 - \gamma p$, also $-\alpha = 1$, $\alpha + \beta + \gamma = 0$ und $\beta - \gamma = 0$. Dieses giebt $\beta = \gamma$; und wegen $-\alpha = 1$, $-1 + 2\beta = 0$, also $\alpha = -1$, $\beta = \gamma = \frac{1}{2}$; folglich ist

$$\frac{1}{p\,(p^2 - 1)} = \frac{1}{2(p + 1)} + \frac{1}{2(p - 1)} - \frac{1}{p}$$ und folglich in (448.)

$$\frac{d^2 p}{dp} = \frac{4pdp}{p^2 - 1} - \frac{3dp}{2(p + 1)} - \frac{3dp}{2(p - 1)} + \frac{3dp}{p}.$$

Hiervon ist die Stammgleichung

$\log dp = 2 \log (p^2 - 1) - \frac{3}{2} \log (p + 1) - \frac{3}{2} \log (p - 1) + 3 \log p + \log a$, wenn $\log a$ die hinzukommende Constante bedeutet, oder auch

$$\log dp = \log \frac{(p^2 - 1)^2 . p^3 . a}{(p^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} = \log\,(ap^3\,(p^2 - 1)^{\frac{1}{2}}),$$

also ist

$$dp = ap^3 \sqrt{(p^2 - 1)}$$

Es war $p = ds$ also ist $\sqrt{(p^2 - 1)} = \sqrt{(ds^2 - 1)} = dy$. Dieses giebt

$$dp = ap^3 dy \text{ oder } \frac{dp}{p^3} = ady.$$

Hiervon ist die Stammgleichung $-\frac{1}{p^2} = ay + \text{Const.} = ay - C$

wenn Const. $= -c$, oder $p^2 = \frac{1}{c - ay}$. Da $p = ds$, so ist $p^2 = ds^2 = 1 + dy^2$, also ist $1 + dy^2 = \frac{1}{c - ay}$, oder $dy^2 = \frac{1}{c - ay} - 1$, oder $dy^2 = \frac{1 - c + ay}{c - ay}$ also

$$449. \quad dy = \sqrt{\frac{1 - c + ay}{c - ay}}$$

Die Stammgröße hiervon ist bekanntlich die Gleichung einer Cycloide. Also hat die Cycloide die Eigenschaft, daß der Raum den sie mit ihrer Evolute und zweien Halbmessern der Krümmung an den Enden des Bogens einschließt, ein Maximum oder Minimum gegen alle andere Linien über gleichen Abcissen ist.

274.

Man pflegt auch wohl, wenn man dieses Beispiel giebt, die Bedingung wegzulassen, daß die Linie über einer gegebenen Abciſſe liegen müſſe, allein es ist nicht ganz deutlich, was man alsdann unter dem Ausdruck: die Fläche zwischen der Linie, ihrer Evolute und zwei Krümmungs-Halbmessern solle ein Größtes oder Kleinstes seyn, verstehe. Zum Begriff des Größten oder Kleinsten gehört ein Anderes, gegen welches die Vergleichung angestellt werden kann, und welches kleiner oder größer ist als das Maximum oder Minimum. Ein solches aber scheint ohne weitere Bedingung nicht da zu seyn. Daher, glaube ich, muß irgend eine Bedingung hinzugefügt werden, und zwar gleich vom Anfang an, wie es bei Einführung der Bedingungs-Gleichung nöthig ist. Man kann verschiedene andere Bedingungen machen, z. B. daß die Linie mit andern, gegen die man sie vergleichen will, gleiche Länge haben oder mit ihnen und den Coordinaten gleiche Flächen einschließen soll u. s. w. Im ersten Fall wäre

$$v_1 = -\frac{ds^4}{d^2y} - a\,ds,$$

im andern

$$v_1 = -\frac{ds^4}{d^2y} - ay.$$

In diesen beiden Fällen ist die Rechnung viel verwickelter.

Sechstes Beispiel.

Von der Kettenlinie unter zwei festen Punkten in der Horizontale.

275.

Fig. 23. Die Kettenlinie ist diejenige Linie, deren Schwerpunkt tiefer unter der horizontal angenommenen graden Linie durch die beiden Aufhänge-Punkte liegt, als der Schwerpunkt jeder andern Linie von gleicher Länge.

Es sey $AP = x$, $PM = y$, $AC = a$, der Bogen $BAD = b$, der Bogen $MA = s$, die Tiefe des Schwerpunkts unter $BD = t$, so ist nach statischen Gesetzen:

$$t.\ b = \frac{1}{d}\left[(a - x)\ ds\right] \text{ folglich}$$

$$t = \frac{\frac{1}{d}\left[(a - x)\ ds\right]}{b}$$

und dieses t soll ein Maximum seyn, unter der Bedingung, daß $s = b$. Hier ist also $v = \frac{(a-x)\ ds}{b}$ und $V = ds$ also

$$v_1 = \frac{(a-x)\,ds}{b} - cds = \left(\frac{a-x}{b} - c\right) \sqrt{(1 + dy^2)}$$

oder kürzer

$$v_1 = (e-x) \sqrt{(1 + dy^2)}$$

Dieses giebt $\frac{d}{y} v_1 = 0$, $\frac{d}{dy} v_1 = (e-x) \frac{dy}{\sqrt{(1+dy^2)}}$, $\frac{d}{d^2y} v_1$ rc. $= 0$. Also ist hier die Bedingungs-Gleichung für die Existenz des Maximums bloß $- d\frac{d}{dy} v_1 = 0$, welches giebt $\frac{d}{dy} v_1 =$ Const. $= \varkappa$, also $(e-x) \frac{dy}{\sqrt{(1+dy^2)}} = \varkappa$. Daraus folgt $\frac{(e-x)^2}{\varkappa^2} = \frac{1+dy^2}{dy^2} = \frac{1}{dy^2} + 1$ oder $\frac{(e-x)^2 - \varkappa^2}{\varkappa^2} = \frac{1}{dy^2}$ oder $dy = \frac{\varkappa}{\sqrt{((e-x)^2 - \varkappa^2)}}$.

Setzt

Setzt man dies willkührliche e negativ und $e^2 - k^2 = 0$ so ist

$$dy = \frac{k}{\sqrt{(2ex + x^2)}}$$

welches die bekannte Ableitungs-Gleichung für die Kettenlinie ist.

Da die Grenzen fest sind, so folgt weiter aus der Grenzen-Gleichung nichts.

Siebentes Beispiel.

Von der Kettenlinie, deren Aufhänge-Punkte in gegebenen Linien liegen.

276.

Fig. 24. Alles aus dem vorigen Beispiele bleibt, nur ist jetzt, wenn die Aufhänge-Punkte nicht bestimmt sind, x für die Grenzen abhängig, und die Gleichung für die Grenzen

$$\frac{\delta}{w}\overset{1}{(u)} - \frac{\delta}{w}\overset{0}{(u)} = 0$$

dient, die Lage der Aufhänge-Punkte zu finden.

Sind die Grenzen von einander unabhängig, so ist einzeln $\frac{\delta}{w}\overset{1}{(u)} = 0$ und $\frac{\delta}{w}\overset{0}{(u)} = 0$. Es ist aber

$$\frac{\delta}{w}(u) = \frac{d}{dy} v_1 \frac{\delta}{w} y + v \frac{\delta}{w} x \text{ oder}$$

$$\frac{\delta}{w}(u) = \frac{d}{dy} v_1 \left(\frac{\delta}{w} y - dy \frac{\delta}{w} x\right) + v \frac{\delta}{w} x$$

und aus der Gleichung der Grenzen folgt, wie in (§. 270.), wenn man die variirten und abgeleiteten Gleichungen davon nimmt, und durch Verbindung derselben das Verhältniß zwischen $\frac{\delta}{w} x$ und $\frac{\delta}{w}(y)$ entwickelt,

$\frac{\delta}{w}(y) = (dy) \frac{\delta}{w} x$, wo sich (dy) auf die Linie EBF bezieht,

Also ist

$$\frac{\delta}{w}(u) = \frac{d}{dy} v_1 \left((dy) \frac{\delta}{w} x - dy \frac{\delta}{w} x\right) + v \frac{\delta}{w} x = 0$$

folglich $\frac{d}{dy} v_1 [(dy) - dy] + v = 0.$

Nun war hier $\frac{d}{dy} v_1 = (e - x) \frac{dy}{ds}$ und $v = (e - x) ds$

also ist $(e - x) \frac{dy}{ds} [(dy) - dy] + (e - x) ds = 0$ oder

$$dy [(dy) - dy] + ds^2 = 0 \text{ oder}$$
$$ds^2 - dy^2 + dy (dy) = 0 \text{ oder}$$

450. $1 + dy (dy) = 0$

woraus, wie in (§. 270.) folgt, daß die Tangenten der Linien BAD und EBF, in dem Punkte B, auf einander senkrecht seyn müssen. Ein Gleiches gilt für die andere Grenze in D, und es wird dabei vorausgesetzt, daß die Punkte B und D in einer Horizontal-Linie liegen.

Was die Rechnung giebt, ist die bekannte Bedingung für die Lage der Kettenlinie gegen die Grenzen.

Achtes Beispiel.

Von der Gestalt einer Figur von gegebener Größe, deren Schwerpunkt, der horizontalen Linie, an welcher die Fläche aufgehängt ist, so nahe oder ferne liegt, als möglich.

277.

Fig. 25. Es sey $AP = x$, $PM = y$, so ist die Summe der Momente aller Theile der Fläche AMB, $= \frac{1}{d} \cdot (\frac{1}{2} y^2)$ die Fläche AMB aber ist $\frac{1}{d} y = a$. Also soll $\frac{\frac{1}{d} (\frac{1}{2} y^2)}{a}$ ein Minimum und $\frac{1}{d} y$ soll gleich a seyn. Dieses giebt

$$v = c \frac{y^2}{2a} \text{ und } V = y \text{ also}$$

$$v - cV \text{ oder } v_1 = \frac{y^2}{2a} - cy.$$

Daraus folgt $\frac{d}{y} v_1 = \frac{y}{a} - c$. Also, da hier die Bedingungs-Gleichung für die Existenz des Minimums bloß $\frac{d}{y} v_1 = 0$ ist, weil alle übrigen Glieder $\frac{d}{dy} v_1 \; \frac{d}{d^2y} v_1 \ldots = 0$ sind,

451. $\frac{y}{a} - c = 0$ oder $y = ac$

woraus folgt, daß AMB grade und mit AB parallel, oder AMB ein Parallelogramm seyn muß.

Neuntes Beispiel.

Von der Linie, welche unter allen von gleicher Länge und Fläche, das größte Sphäroid um die Axe der x beschreibt.

278.

Die Länge der Linie ist $\frac{1}{d} \sqrt{(1 + dy^2)}$, die Fläche unter den Coordinaten ist $\frac{1}{d} y$, der Inhalt des Sphäroids um die Axe, $\frac{1}{d} y^2$; also finden hier zwei Bedingungs-Gleichungen statt, und es ist $v = y^2$, $V = y$, $V^1 = \sqrt{(1 + dy^2)}$ also

$$v_1 = y^2 - ay - b \sqrt{(1 + dy^2)}$$

wenn a, b die constanten Multiplicatoren der Bedingungs-Gleichungen bedeuten. Dies giebt

$\frac{d}{y} v_1 = 2y - a$, $\frac{d}{dy} v_1 = - \frac{bdy}{\sqrt{(1 + dy^2)}}$ und alle übrige Größen $\frac{d}{d^2y} v$ &c. $= 0$; also ist die Bedingungs-Gleichung für die Existenz von u, nämlich $\frac{d}{y} v_1 - d \frac{d}{dy} v_1 - d^2 \frac{d}{d^2y} v_1 \ldots = 0$ hier:

$$2y - a + d \left(\frac{bdy}{\sqrt{(1 + dy^2)}} \right) = 0$$

Es ist

$$d\frac{dy}{\sqrt{(1+dy^2)}} = \frac{d^2y}{\sqrt{(1+dy^2)}} - \frac{dy^2 d^2y}{(1+dy^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{dy^2}{(1+dy^2)^{\frac{3}{2}}}$$

also ist die Bedingungs-Gleichung

$$452.\quad 2y - a + \frac{bd^2y}{(1+dy^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Man multiplicire dieselbe mit dy, so erhält man

$$2ydy - ady + \frac{bdyd^2y}{(1+dy^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

wovon die Stammgleichung

$$y^2 - ay - \frac{b}{\sqrt{(1+dy^2)}} = c$$

ist. Daraus folgt

$$(y^2 - ay - c)^2 = \frac{b^2}{\sqrt{1+dy^2)}} \text{ oder } 1 + dy^2 = \frac{b^2}{(y^2 - ay - c)^2}$$

$$\text{oder } dy^2 = \frac{b^2 - (y^2 - ay - c)^2}{(y^2 - ay - c)^2} \text{ also}$$

$$453.\quad 1 = \frac{(y^2 - ay - c)\,dy}{\sqrt{[b^2 - (y^2 - ay - c)^2]}}$$

Die Stammgleichung hiervon, welche sich durch sogenannte Integral-Logarithmen ausdrücken läßt, giebt die Gleichung der gesuchten Linie. Sie ist die sogenannte elastische, weil ihre Gestalt mit derjenigen übereinkommt, die eine durch Drücken auf die Enden krumm gebogene Feder annimmt.

Zehntes Beispiel.

Von dem Querschnitt des Canals, der unter allen von gleichem Umfange, das meiste Wasser abführt.

279.

Fig. 26. Die Geschwindigkeit des Wassers in einer beliebigen Tiefe x unter dem Wasserspiegel werde durch φx bezeichnet, so ist die Wassermenge, welche in der Höhe x ab-

fließt, $= 2y\varphi x$ und folglich die Wassermenge, welche durch den ganzen Canal fließt, $\frac{1}{d}(2y\varphi x)$. Der Umfang des Querschnitts ist $\frac{1}{d}\sqrt{(1+dy^2)}$, also ist hier $v = 2y\varphi x$, $V = \sqrt{(1+dy^2)}$ folglich

454. $v_1 = 2y\varphi x - a\sqrt{(1+dy^2)}$

Dies giebt $\frac{d}{y}v_1 = 2\varphi x$, $\frac{d}{dy}v = -\frac{ady}{\sqrt{(1+dy^2)}}$

also ist die Bedingungs-Gleichung für die Existenz von u

455. $2\varphi x + d\frac{ady}{\sqrt{(1+dy^2)}} = 0.$

Daraus folgt $\frac{ady}{\sqrt{(1+dy^2)}} = b - \frac{1}{d}2\varphi x$

wenn b die neue Constante bedeutet. Es sey $\frac{1}{d}2\varphi x = fx$,

so ist $\frac{\sqrt{(1+dy^2)}}{ady} = \frac{1}{b-fx}$ also $\frac{1}{dy^2} + 1 = \frac{a^2}{(b-fx)^2}$

und $\frac{1}{dy^2} = \frac{a^2-(b-fx)^2}{(b-fx)^2}$ und

456. $dy = \frac{b-fx}{\sqrt{[a^2-(b-fx)^2]}}$

Die Stammgleichung hievon giebt die Gleichung der Linie, die den Querschnitt begrenzt.

280.

Nennt man die Geschwindigkeit in der Oberfläche c, und nimmt an, daß solche vom Boden nach oben zu, wie es in der Natur der Fall zu seyn pflegt, zunimmt, also in der Tiefe P etwa $c - mx$ ist, so ist $\varphi x = c - mx$, also fx oder $\frac{1}{d}\varphi x = cx - \frac{1}{2}mx^2 + e$. Dieses giebt für dy, wenn man statt $b - e$ bloß b schreibt,

457. $dy = \frac{b - cx + \frac{1}{2}mx^2}{\sqrt{[a^2-(b-cx+\frac{1}{2}mx^2)^2]}}$

Diese Gleichung kommt im Wesentlichen mit der (453.) überein, wenn man die Coordinaten verwechselt, also ist die gesuchte Linie ebenfalls eine elastische, deren Axe horizontal liegt.

281.

Setzt man die Geschwindigkeit in allen Höhen gleich, so ist $\phi x = c$ und folglich gleich $fx = cx + e$, und folglich, wenn man wieder bloß b statt $b - e$ schreibt,

$$458. \quad dy = \frac{b - cx}{\sqrt{[a^2 - (b - cx)^2]}}$$

Die Stammgleichung hiervon ist die Gleichung eines Kreises. In der That muß der Querschnitt des Canals, wenn die Geschwindigkeit überall durch den ganzen Querschnitt gleich groß ist, ein Kreis seyn, weil die Aufgabe für eine constante Geschwindigkeit sich darauf reducirt, unter allen Linien von gleichem Umfange diejenige zu finden, welche den größten Raum einschließt. Und diese Linie ist, wie bekannt, und wie in (§. 271.) gefunden, der Kreis.

Eilftes Beispiel.

Von der Linie des schnellsten Falles (Brachystochrone.)

282.

I. Die Linie des schnellsten Falles ist der Weg, den ein von der Schwere getriebener Körper nehmen muß, um von einem höher liegenden nach einem, irgendwo niedriger liegenden Punkt, in der kürzesten Zeit zu gelangen.

II. Die Linie liegt offenbar in einer senkrechten, durch die beiden Punkte gehenden Ebene, die zur Coordinaten Ebene angenommen werden kann. Die Abcissen x sollen senkrecht, die Ordinaten y wagerecht seyn. Die Geschwindigkeit in einem beliebigen Punkte der Linie werde durch $\sqrt{z}$ bezeichnet, so wäre, wenn sich der Körper in einem nicht widerstehenden Mittel bewegte, und die Geschwindigkeit von $31\frac{1}{4}$ Fuß Rheinl., welche ein frei fallender Körper nach einer Secunde Fall von der Ruhe erhält, g heißt, bekanntlich

$$z = 2gx$$

also dz nämlich $\frac{d}{x} z = 2g$, oder auch, wenn man will, $\frac{d}{x} z = 2g\,dx$. Hierdurch läßt sich die Wirkung für die Bewegung im widerstehenden Mittel ausdrücken. Es bedeute nämlich φz die Geschwindigkeit, welche eine Kraft, die dem Widerstande des Mittels gleich ist, an der Stelle der Schwere, in einer Secunde Zeit von der Ruhe an hervorbringen würde, so tritt φz an die Stelle von g. Ferner ist jetzt die erste Ableitung des durchlaufenen Raumes, weil der Widerstand des Mittels, nicht sowohl senkrecht, sondern in der Richtung der Tangente der Bahn wirkt $\sqrt{(1 + dy^2)}$, also ist für die Wirkung des widerstehenden Mittels $\frac{d}{x} z = 2\varphi z \sqrt{(1 + dy^2)}$. Diese Wirkung ist derjenigen der Schwere entgegengesetzt, also ist, wenn sich beide vereinigen,

$$\frac{d}{x} z = 2g - 2\varphi z \sqrt{(1 + dy^2)}$$

oder weil sich alles d auf x bezieht,

459. $dz = 2g - 2\varphi z \sqrt{(1 + dy^2)}$

III. Ferner ist die Zeit t gleich dem durchlaufenen Raum, dividirt durch die Geschwindigkeit, also ist für einen beliebigen Punkt der Bahn

$$dt = \frac{\sqrt{(1+dy^2)}}{\sqrt{z}}$$ woraus folgt

460. $t = \frac{1}{d} \frac{\sqrt{(1+dy^2)}}{\sqrt{z}}$

IV. Aus den beiden Gleichungen (459. 460.) muß die Aufgabe aufgelöset werden. Nämlich die Zeit $t = \frac{1}{d} \frac{\sqrt{(1+dy^2)}}{\sqrt{z}}$ soll ein Maximum oder Minimum seyn, und (459.) ist eine Bedingungs-Gleichung zwischen den Größen der Aufgabe, und zwar eine solche die Ableitungen enthält.

Hier also ist ein Fall, wo die Theorie (VII) Anwendung findet; nämlich, wo es darauf ankommt, Bedingungen zwischen den Größen der Aufgabe in Rechnung zu bringen; welches durch unbestimmte Multiplicatoren geschieht.

VI. Vergleicht man die Aufgabe mit (§. 258.), so ist leicht zu sehen, daß hier

461. $v = \sqrt{\frac{1 + dy^2}{z}}$ und $\alpha = dz - 2g + 2\varphi z \sqrt{(1 + dy^2)}$,

denn v ist die Größe, die ein Maximum oder Minimum seyn soll, und $\alpha = 0$ ist die Bedingungs-Gleichung zwischen den Größen der Aufgabe.

Es ist $\frac{d}{y} v = 0$, $\frac{d}{dy} v = \frac{dy}{\sqrt{(z(1 + dy^2))}}$, $\frac{d}{d^2y} v$ ꝛc. $= 0$;

$$\frac{d}{z} v = -\frac{\sqrt{(1 + dy^2)}}{2z^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{d}{dz} v \text{ ꝛc.} = 0$$

$$\frac{d}{y} \alpha = 0, \quad \frac{d}{dy} \alpha = \frac{2\varphi z dy}{\sqrt{(1 + dy^2)}}, \quad \frac{d}{d^2y} \alpha \text{ ꝛc.} = 0;$$

$$\frac{d}{z} \alpha = 2 \frac{d}{z} \varphi z \sqrt{(1 + dy^2)}, \quad \frac{d}{dz} \alpha = 1, \quad \frac{d}{d^2z} \alpha \text{ ꝛc.} = 0.$$

Setzt man dieses in die Bedingungs-Gleichungen für die Existenz von δu (419) so erhält man die beiden Gleichungen

$$462 \begin{cases} -d \frac{dy}{\sqrt{z}\sqrt{(1 + dy^2)}} - d \frac{2\lambda\varphi z y d}{\sqrt{(1 + dy^2)}} = 0 \text{ und} \\ -\frac{\sqrt{(1 + dy^2)}}{2z^{\frac{3}{2}}} + 2\lambda \frac{d}{z} \varphi z \sqrt{(1 + dy^2)} - d\lambda = 0 \end{cases}$$

Eliminirt man zwischen diesen beiden Gleichungen und der Bedingungs Gleichung $\alpha = 0$, die beiden Größen z und λ, so erhält man eine Gleichung zwischen x und y, die die Gleichung der gesuchten Curve ist.

VI. Da ferner in (§. 258. VII.) $\overset{1}{Y} = \frac{d}{dy} v - d \frac{d}{d^2y} v \ldots$ und

$$(\overset{1}{Y}) = \lambda \frac{d}{dy} \alpha - d \left(\lambda \frac{d}{d^2y} \alpha\right) \ldots \text{ desgleichen}$$

$$\overset{1}{Z} = \frac{d}{dz} v - d \frac{d}{d^2z} v \ldots \quad (\overset{1}{Z}) = \lambda \frac{d}{dz} \alpha - d \left(\lambda \frac{d}{d^2z} \alpha\right) \ldots$$

so ist hier $\overset{1}{Y} = \frac{dy}{\sqrt{z}\sqrt{(1 + dy^2)}}$, $(\overset{1}{Y}) = \frac{2\lambda\varphi z dy}{\sqrt{(1 + dy^2)}}$

$$\overset{1}{Z} = 0, \qquad (\overset{1}{Z}) = \lambda,$$

also ist zufolge (418.) die Gleichung für die Grenzen $\frac{\delta!}{w}(u) = o$, hier:

$$o = \frac{\delta}{w}(u) = \frac{\delta}{w}x \sqrt{\frac{1+dy^2}{z}} + \left[\frac{dy}{\sqrt{(z}\sqrt{(1+dy^2)}} + \frac{2\lambda\varphi z dy}{\sqrt{(1+dy^2)}}\right]\frac{\delta}{x}y + \lambda\frac{\delta}{x}z \text{ oder}$$

$$463.\ \frac{\delta}{w}(u) = \lambda\frac{\delta}{x}z + \left(\frac{1}{\sqrt{z}} + 2\varphi z\right)\frac{dy}{\sqrt{(1+dy^2)}}\cdot\frac{\delta}{x}y + \frac{\delta}{w}x\sqrt{\frac{1+dy^2}{z}} = o$$

welche hier auf die beiden Grenzen bezogen werden muß.

283.

Widersteht das Mittel, worin sich der Körper bewegt, nicht, so ist $\varphi z = o$, also $\alpha = dz - 2g = o$, und folglich $dz = 2g$ und $z = 2gx + b$, wenn b die hinzukommende Constante ist. Für den Anfangs-Punkt der Bewegung ist

$\overset{1}{z} = 2g\overset{1}{x} + b$, also $b = \overset{1}{z} - 2g\overset{1}{x}$ und folglich $z = 2gx + \overset{1}{z} - 2g\overset{1}{x}$ oder

$$464.\ z = 2g(x - \overset{1}{x}) + \overset{1}{z}$$

Ferner giebt die erste Gleichung von den beiden (462.) allgemein

$$465.\ \frac{dy}{\sqrt{z}\sqrt{(1+dy^2)}} + \frac{2\lambda\varphi z dy}{\sqrt{(1+dy^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a}},$$

wenn man die hinzukommende Constante, der Gleichförmigkeit wegen, durch $\frac{1}{\sqrt{a}}$ bezeichnet. Dieses giebt für den jetzigen einzelnen Fall, wo $\varphi z = o$ ist,

$$\frac{dy}{\sqrt{(z(1+dy^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \text{ oder } ady^2 = z(1+dy^2) \text{ oder}$$

$(a - z)\,dy^2 = z$, also $dy = \sqrt{\frac{z}{a-z}}$. Setzt man darin den Ausdruck für z (464.), so erhält man

$$466. \quad dy = \sqrt{\frac{2g(x-x')+z'}{a-2g(x-x')-z'}}$$

In dieser Gleichung kommen nur noch die beiden veränderlichen Größen x und y vor, weil $\overset{1}{x}$ und $\overset{1}{z}$ nicht veränderliche sondern bestimmte Größen sind, die sich auf den Anfangs-Punkt der Bewegung beziehen. Also läßt sich die Gleichung zurückleiten. Ihre Stammgleichung giebt, wie leicht zu sehen, der Cycloide. Diese Curve ist also die Linie des schnellsten Falles im nicht widerstehenden Mittel.

284.

I. Für ein widerstehendes Mittel hat man für
Die Gleichung der Curve
die drei Gleichungen

$$467. \begin{cases} \alpha = dz - 2g + 2\varphi z \sqrt{(1+dy^2)} = 0 \quad (461.) \\ \frac{dy}{\sqrt{(1+dy^2)}}\left(\frac{1}{\sqrt{z}} + 2\lambda\varphi z\right) = \frac{1}{\sqrt{a}} \\ d\lambda + \left(\frac{1}{2z\sqrt{z}} - 2\lambda\frac{d}{z}\varphi z\right)\sqrt{(1+dy^2)} = 0 \end{cases} (462. 465.)$$

zwischen welchen λ und z eliminirt werden müssen.

II. Man setze $\frac{r}{\sqrt{z}} + 2\lambda\varphi z = s$, so ist aus der zweiten Gleichung

$$468. \quad s.\frac{dy}{\sqrt{(1+dy^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

Ferner ist aus $s = \frac{1}{\sqrt{z}} + 2\lambda\varphi z$, $ds = -\frac{dz}{2z\sqrt{z}} + 2\lambda\frac{d}{z}\varphi z.dz$ $+ 2d\lambda.\,\varphi z$, oder

$$ds = 2\varphi z d\lambda - dz\left(\frac{1}{2z\sqrt{z}} - 2\lambda\frac{d}{z}\varphi z\right)$$

woraus folgt

$$\left(\frac{1}{2z\sqrt{z}} - 2\lambda\frac{d}{z}\varphi z\right) = \frac{2\varphi z d\lambda - ds}{dz}$$

Setzt man dieses in die 3te Gleichung (467.), so erhält man

$$d\lambda + \frac{2\varphi z d\lambda - ds}{dz} \cdot \sqrt{(1 + dy^2)} = 0 \text{ oder}$$

469. $d\lambda dz + (2\varphi z d\lambda - ds) \sqrt{(1 + dy^2)} = 0$

III. Nun giebt die erste Gleichung (467.) $dz = 2g - 2\varphi z \sqrt{(1 + dy^2)}$. Substituirt man diesen Werth von dz in (469), so erhält man

$d\lambda\, [2g - 2\varphi z \sqrt{(1 + dy^2)}] + (2\varphi z d\lambda - ds) \sqrt{(1 + dy^2)} = 0$ oder

470. $2gd\lambda - ds \sqrt{(1 + dy^2)} = 0$

IV. Die Größe $ds \sqrt{(1 + dy^2)}$ ist gleich $d[s \sqrt{(1 + dy^2)}] - sd \sqrt{(1 + dy^2)}$, also ist

$$ds \sqrt{(1 + dy^2)} = d[s \sqrt{(1 + dy^2)}] - \frac{sdyd^2y}{\sqrt{(1 + dy^2)}}$$

Es ist aber $s \dfrac{dy}{\sqrt{(1 + dy^2)}} = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$ (468.) also ist

$$ds \sqrt{(1 + dy^2)} = d[s \sqrt{(1 + dy^2)}] - \frac{d^2y}{\sqrt{a}}$$

folglich in (470.)

$$2gd\lambda - d[s \sqrt{(1 + dy^2)}] + \frac{d^2y}{\sqrt{a}} = 0.$$

Hiervon ist die Stammgleichung, wenn b die hinzukommende Constante bedeutet,

$$2g\lambda + \frac{dy}{\sqrt{a}} - s \sqrt{(1 + dy^2)} = b$$

V. Substituirt man hierin den Werth von s aus (468.), nämlich

$$s = \frac{\sqrt{(1 + dy^2)}}{du \sqrt{a}}, \text{ so erhält man}$$

$$2g\lambda + \frac{dy}{\sqrt{a}} - \frac{1 + dy^2}{dy \sqrt{a}} = b \text{ oder}$$

$$2g\lambda - \frac{1}{dy \sqrt{a}} = b, \text{ woraus folgt}$$

471. $$\lambda = \frac{1}{2gd\lambda \sqrt{a}} + \frac{b}{2g}$$

welches der Ausdruck der einen zu eliminirenden Größe λ ist.

VI. Setzt man diesen Werth von λ in die zweite Gleichung (467.), so erhält man

$$472. \quad \frac{dy}{\sqrt{(1+dy^2)}}\left(\frac{1}{\sqrt{z}} + \frac{\varphi z}{gdy\sqrt{a}} + \frac{b\varphi z}{g}\right) = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

Diese Gleichung und die erste von (467.) nämlich

$$dz - 2g + 2\varphi z\sqrt{(1+dy^2)} = 0$$

enthalten, nur noch x, y und z. Eliminirt man also zwischen diesen beiden Gleichungen z, so erhält man eine Gleichung zwischen x und y allein, welche die Gleichung der Curve ist.

Da besondere Anwendungen für bestimmte Verhältnisse des Widerstandes des Mittels zur Geschwindigkeit, das heißt für bestimmte φz, bloß algebraische und Ableitungs-Operationen erfordern, auf welche es hier nicht weiter ankommt, so mögen dergleichen Anwendungen, um den Raum zu ersparen, unterbleiben.

Grenzen.

VII. Die Gleichung für die Grenzen (463.) giebt Folgendes. Zuerst nämlich ist wie bekannt $\frac{\delta}{x}y = \frac{\delta}{w}y - dy\frac{\delta}{w}x$ und $\frac{\delta}{x}z = \frac{\delta}{w}z - dz\frac{\delta}{w}x$. Führt man diese Ausdrücke für $\frac{\delta}{x}y$ und $\frac{\delta}{x}z$ in die Gleichung (463.) ein, so bezieht sich alsdann alles δ auf w, folglich darf man bloß δ schreiben. Dieses giebt

$$\delta u = (\delta z - dz\delta x) + \left(\frac{1}{\sqrt{z}} + 2\lambda\varphi z\right)\frac{dy}{\sqrt{(1+dy^2)}}(\delta y - dy\delta x)$$
$$+ \delta x\sqrt{\frac{1+dy^2}{z}} = 0.$$

Setzt man hier wiederum wie (468.) $\frac{1}{\sqrt{z}} + 2\lambda\varphi z = s$ und den Werth von δz aus der ersten der Gleichungen (467.) nämlich $dz = 2g - 2\varphi z\sqrt{(1+dy^2)}$, so erhält man

$$\delta u = \lambda(\delta z - [2g - 2\varphi z\sqrt{(1+dy^2)}]\delta x + \frac{sdy}{\sqrt{(1+dy^2)}}(\delta y - \delta y\delta x)$$
$$+ \delta x\sqrt{\frac{1+dy^2}{z}} = 0 \text{ oder}$$

$$\delta u = \lambda\delta z - 2g\lambda\delta x + 2\lambda\varphi z\delta x \sqrt{(1+dy^2)} + \delta x \sqrt{\frac{1+dy^2}{z}}$$

$$+ \frac{sdy}{\sqrt{(1+dy^2)}} (\delta y - dy\delta x) = 0, \text{ oder}$$

$$\delta u = \lambda\delta z - 2g\lambda\delta x + \left(2\lambda\Phi z + \frac{1}{\sqrt{z}}\right) \delta x \sqrt{(1+dy^2)}$$

$$\frac{sdy}{\sqrt{(1+dy^2)}} (\delta y - dy\delta x) = 0,$$

oder, weil $2\lambda\varphi z + \frac{1}{\sqrt{z}} = s$,

$$\delta u = \lambda\delta z - 2g\lambda\delta x + s\delta x\sqrt{(1+dy^2)} + \frac{sdy}{\sqrt{(1+dy^2)}}(\delta y - dy\delta x) = 0$$

oder

$$\delta u = \lambda\delta z - 2g\lambda\delta x + \frac{s}{\sqrt{(1+dy^2)}} (dy\delta y - dy^2\delta x(1+dy^2)) = 0,$$

oder

$$\delta u = \lambda\delta z - 2g\lambda\delta x + \frac{s\,(dy\delta y + \delta x)}{\sqrt{(1+dy^2)}} = 0.$$

Setzt man hierin den Werth von s aus (468.), nämlich

$$s = \frac{\sqrt{(1+dy^2)}}{dy\sqrt{a}},$$ so erhält man

$$\delta u = \lambda\delta z - 2g\lambda\delta x + \frac{dy\delta y + \delta x}{dy\sqrt{a}} = 0, \text{ oder}$$

473. $$\delta u = \left(\frac{1}{dy\sqrt{a}} - 2g\lambda\right)\delta x + \frac{\delta y}{\sqrt{a}} + \lambda\delta z = 0,$$

welches die abgekürzte Gleichung für die Grenzen ist, die nun auf beide Grenzen besonders bezogen werden muß.

VIII. Die Grenzgleichung enthält die Größe λ, welche weggeschafft werden muß. Es kommt also darauf an, diese Größe λ für die Grenzen zu finden.

Die Geschwindigkeit $\sqrt{z}$ wird an der ersten Grenze, das heißt für den Anfangs-Punkt der Bewegung gegeben seyn, und kann also auf irgend eine Weise, als von den Coordinaten $\overset{\circ}{x}$, $\overset{\circ}{y}$ des ersten Grenzpunkts, abhängend betrachtet werden. Also kann man setzen:

$$z^\circ = \psi(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$$

wo ψ ein Abhängigkeits-Zeichen ist wie f, φ ꝛc. Aus dieser Gleichung folgt

$$474.\quad \delta\overset{\circ}{z} = \frac{d}{x}\overset{\circ}{z}\,\delta\overset{\circ}{x} + \frac{d}{y}\overset{\circ}{z}\,\delta\overset{\circ}{y}$$

welches in die Grenzen-Gleichung (473) gesetzt; nachdem solche auf die erste Grenze bezogen worden, Folgendes giebt:

$$\delta\overset{\circ}{u} = \left(\frac{1}{d\overset{\circ}{y}\sqrt{a}} - 2g\overset{\circ}{\lambda}\right)\delta\overset{\circ}{x} + \frac{\delta\overset{\circ}{y}}{\sqrt{a}} + \overset{\circ}{\lambda}\left(\frac{\delta}{x}\overset{\circ}{z}\,\delta\overset{\circ}{x} + \frac{d}{y}\overset{\circ}{z}\,\delta\overset{\circ}{y}\right) = 0$$

oder

$$475.\quad \delta\overset{1}{u} =$$

$$\left(\frac{1}{d\overset{\circ}{y}\sqrt{a}} - 2g\overset{\circ}{\lambda} + \overset{\circ}{\lambda}\frac{d}{x}\overset{\circ}{z}\right)\delta\overset{\circ}{x} + \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \overset{\circ}{\lambda}\frac{d}{y}\overset{\circ}{z}\right)\delta\overset{\circ}{y} = 0$$

welches die Gleichung der ersten Grenze ist.

IX. Für die zweite Grenze, für welche ebenfalls $\delta u = 0$, also $\delta\overset{1}{u} = 0$, ist die Geschwindigkeit $\sqrt{z}$ unbestimmt, weil sie von der Natur der Linie, die man sucht, abhängt, also ist $\delta\overset{1}{z}$ unabhängig von δx und δy. Bezieht man also die Grenzen-Gleichung (473.) auf die zweite Grenze, welches giebt

$$476.\quad \delta\overset{1}{u} = \left(\frac{1}{d\overset{1}{y}\sqrt{a}} - 2g\overset{1}{\lambda}\right)\delta\overset{1}{x} + \frac{\delta\overset{1}{y}}{\sqrt{a}} + \overset{1}{\lambda}\,\delta\overset{1}{z} = 0$$

so ist in derselben der Coefficient zu $\delta\overset{1}{z}$ für sich gleich Null. Folglich ist

$$477.\quad \overset{1}{\lambda} = 0.$$

Setzt man dieses in den allgemeinen Ausdruck für λ (471.) nachdem solcher auf die zweite Grenze bezogen worden, also in

$\lambda' \dfrac{1}{2gd\overset{1}{y}\sqrt{a}} + \dfrac{b}{2g}$, so erhält man

$$0 = \frac{1}{2gd\overset{1}{y}\sqrt{a}} + \frac{b}{2g} \text{ oder}$$

$$478.\quad b = -\frac{1}{d\overset{1}{y}\sqrt{a}}$$

also in (471.) für den allgemeinen Ausdruck für λ,

$$479. \quad \lambda = \frac{1}{2g\sqrt{a}}\left(\frac{1}{dy} - \frac{1}{\overset{1}{dy}}\right)$$

folglich den Werth von λ für die erste Grenze

$$480. \quad \lambda' = \frac{1}{2g\sqrt{a}}\left(\frac{1}{\overset{0}{dy}} - \frac{1}{\overset{1}{dy}}\right)$$

so daß hier die Gleichung $\lambda' = 0$ gedient hat, die unbestimmte Constante b und den allgemeinen Ausdruck für λ, und darauf den Werth von λ für die erste Grenze zu bestimmen.

X. Setzt man nun diesen Ausdruck von λ' in die Gleichung der ersten Grenze (475.), so erhält man

$$\delta\overset{0}{u} = \left[\frac{1}{\overset{0}{dy}\sqrt{a}} - \left(\frac{1}{dy^{0}} - \frac{1}{dy}\right) + \frac{\frac{d\overset{0}{z}}{x}}{2g\sqrt{a}}\left(\frac{1}{\overset{0}{dy}} - \frac{1}{\overset{1}{dy}}\right)\delta\overset{0}{x}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{\frac{d\overset{1}{z}}{y}}{2g\sqrt{a}}\left(\frac{1}{\overset{0}{dy}} - \frac{1}{\overset{1}{dy}}\right)\right)\right]\delta\overset{0}{y} = 0 \text{ oder}$$

$$\left[\frac{1}{\overset{0}{dy}} + \left(\frac{\frac{dz}{x}}{2g} - 1\right)\left(\frac{1}{\overset{0}{dy}} - \frac{1}{\overset{1}{dy}}\right)\right]\delta\overset{0}{x} + \left[1 + \frac{\frac{d\overset{0}{z}}{y}}{2g}\left(\frac{1}{\overset{0}{dy}} - \frac{1}{\overset{1}{dy}}\right)\right]\delta\overset{0}{y}$$

$$= 0 \text{ oder}$$

$$481. \quad \left[\frac{1}{\overset{1}{dy}} + \frac{\frac{dz}{x}}{2g}\left(\frac{1}{\overset{0}{dy}} - \frac{1}{\overset{1}{dy}}\right)\right]\delta\overset{0}{x} + \left[1 + \frac{\frac{d\overset{0}{z}}{y}}{2g}\left(\frac{1}{\overset{0}{dy}} - \frac{1}{\overset{1}{dy}}\right)\right]\delta\overset{0}{y}$$

$$= 0$$

XI. Bezeichnet man nun die Ordinaten der Linie, in welcher die erste Grenze liegen soll, durch $fx = y$, so erhält man, ganz auf dieselbe Weise wie in (§. 270.), $\delta y - (dy)\,\delta x = 0$ (433.), oder für die erste Grenze $\delta\overset{0}{y} = (d\overset{0}{y})\,\delta\overset{0}{x}$. Setzt man dieses in (481.) und dividirt durch δx, so erhält man

$$482. \quad \frac{1}{\overset{1}{dy}} + \frac{\frac{d\overset{0}{z}}{x}}{2g}\left(\frac{1}{\overset{0}{dy}} - \frac{1}{\overset{1}{dy}}\right) + \left[1 + \frac{\frac{d\overset{1}{z}}{y}}{2g}\left(\frac{1}{\overset{0}{dy}} - \frac{1}{\overset{1}{dy}}\right)\right](d\overset{0}{y})$$

$$= 0$$

für die erste Grenze.

XII. Für die zweite Grenze ist aus (473.), weil $\overset{1}{\lambda} = 0$,

$$\delta\overset{1}{u} = \left(\frac{1}{\overset{1}{dy}\sqrt{a}}\right)\delta\overset{1}{x} + \frac{\delta\overset{1}{y}}{\sqrt{a}} = 0 \text{ oder}$$

$$483. \quad \delta\overset{1}{x} + \overset{1}{dy}\,\delta\overset{1}{y} = 0.$$

Für die zweite Grenze ist, ähnlicher Weise wie für die erste, $\delta\overset{1}{y} = (dy)\,\delta\overset{1}{x}$ (XI.). Substituirt man dieses, so erhält man $\delta\overset{1}{x} + \overset{1}{dy}\,(\overset{1}{dy})\,\delta\overset{1}{x} = 0$, oder

$$484. \quad 1 + \overset{1}{dy}\,(\overset{1}{dy}) = 0,$$

wie (435.) woraus, wie daselbst in (§. 270.), folgt daß die Linie des schnellsten Falles die Grenz-Linien in rechten Winkeln schneiden muß, von welcher Art auch der Widerstand des Mittels seyn mag.

XIII. Für die anfängliche Geschwindigkeit, oder für die erste Grenze wäre der einfachste Fall der, daß die anfängliche Geschwindigkeit, unabhängig von dem Ort des Anfangs-Punktes, oder daß $\overset{0}{z}$ von $\overset{0}{x}$ und $\overset{0}{y}$ unabhängig ist. In diesem Fall ist

$$\frac{d}{x}\overset{0}{z} = 0 \text{ und } \frac{d}{y}\overset{0}{z} = 0.$$ Setzt man dieses in die Gleichung für die erste Grenze (482.) so erhält man

$$\frac{1}{dy^1} + (\overset{0}{dy}) - 0 \text{ oder}$$

$$484. \quad 1 + (\overset{0}{dy})\,\overset{1}{dy} = 0.$$

Hier ist $(\overset{0}{dy})$ die Tangente des Winkels, welchen die Tangente der ersten Grenzlinie mit der Axe der x in dem Punkt macht, den sie mit der Fallbahn gemein hat, $\overset{1}{dy}$ aber ist die Tangente des Winkels, den die Tangente der Fallbahn am zweiten Grenzpunkt mit der Axe der x macht. Wie in (§. 270.) folgt also aus der Gleichung $1 + (\overset{0}{dy})\,\overset{1}{dy} = 0$, daß jene beide Tangenten auf einander senkrecht stehen müssen.

Die Tangente der Grenzlinie muß also perpendiculär seyn

auf

auf der Tangente der Fallbahn im zweiten Grenzpunkt. Nun muß aber zufolge (XII.) diese letzte Tangente wiederum verpendiculár seyn auf der Tangente der zweiten Grenzlinie, also müssen die Tangenten der beiden Grenzlinien mit einander parallel seyn, das heißt, die Linie des schnellsten Falles muß die beiden Grenzlinien in Punkten schneiden, in welchen die Tangenten der Grenzlinien parallel sind; zugleich muß die Fallbahn der untern Grenzlinie senkrecht begegnen.

XIV. Vorhin wurde angenommen, daß die anfängliche Geschwindigkeit von den Coordinaten des Anfangs-Punkts unabhängig und also gleich groß seyn solle, der Anfangs-Punkt mag hoch oder niedrig liegen. Nimmt man dagegen an, daß der Körper von einem festen Punkte herunter fallen soll, der an derselben Stelle bleibt, der Anfangs-Punkt der Bahn mag hoch oder tief liegen, und nennt h die Höhe des festen Punkts über den Anfangs-Punkt der Coordinaten, so ist $h + \overset{1}{x}$ die Höhe, von welcher der Körper gefallen ist, ehe die Bewegung auf der Bahn begann. Also ist die Geschwindigkeit im Anfangs-Punkte der Bahn

486. $z^o = 2g\,(h + \overset{o}{x})$

Daraus folgt $\frac{d}{x}\overset{o}{z} = 2g$, $\frac{d}{y}\overset{o}{z} = 0$. Setzt man dieses in die Gleichung für die erste Grenze (482.), so erhält man

$$\frac{1}{dy^1} + \left(\frac{1}{dy^o} - \frac{1}{dy^1}\right) + (\overset{o}{dy}) = 0 \text{ oder}$$

487. $1 + \overset{o}{dy}\,(\overset{o}{dy}) = 0$,

woraus folgt, daß in diesem Fall die Linie der schnellsten Bewegung die erste Grenzlinie, also nunmehr beide Grenzlinien, senkrecht schneiden muß. Dagegen ist jetzt der Parallelismus der Tangenten der Grenzlinien in den Durchschnitts-Punkten mit der Fallbahn nicht mehr nöthig.

Zwölftes Beispiel.

Von der Linie der größten Geschwindigkeit.

285.

Diese Linie ist der Weg, welchen ein Körper von einem

höher liegenden nach einem irgendwo niedriger liegenden Punkt nehmen muß, um unten die möglich-größeste Geschwindigkeit zu erhalten.

Die Aufgabe, diese Linie zu finden, ist ganz in der vorigen enthalten. Denn in der vorigen Aufgabe sollte die Zeit $t = \frac{1}{d} \frac{\sqrt{(1+dy^2)}}{\sqrt{z}} = \frac{1}{d} v$ (460.), welche der Körper braucht, seinen Weg zu durchlaufen, ein Maximum oder Minimum seyn, und für die Geschwindigkeit $\sqrt{z}$ war die Bedingungs Gleichung $dz = 2g - 2\varphi z \sqrt{(1+dy^2)}$ (459.) oder $\alpha = 0$ gegeben. Hier ist von der Zeit nicht weiter die Rede, sondern die Geschwindigkeit $\sqrt{z}$, deren Abhängigkeit von den Coordinaten der Bahn der Bewegung, durch die Bedingungs-Gleichung $\alpha = 0$ bestimmt wird, soll die möglich-größeste seyn, und das Gesetz der Coordinaten, nach welchen sich die Geschwindigkeit, vermöge der Bedingungs-Gleichungen richtet, soll danach bestimmt werden. Da man nun, nachdem die Bedingungs-Gleichung mit dem Ausdruck des Maximums oder Minimums, vermittelst des unbestimmten Multiplicators verbunden worden, die gesammten verbundenen Größen als diejenigen betrachten kann, welche das Maximum oder Minimum geben sollen, so paßt die Verbindung auch auf die gegenwärtige Aufgabe, wenn man die Größe v gleich Null setzt, das heißt wenn man ihr denjenigen Werth beilegt, der Statt finden würde, wenn sie gar nicht vorkäme.

Die Rechnungen der vorigen Aufgabe bleiben also ganz, nur daß überall $v = 0$ gesetzt werden muß, und also $\frac{d}{dy} v = 0$, $\frac{d}{z} v = 0$ ist. Dadurch reduciren sich die Gleichungen (462.) auf

$$488. \begin{cases} \frac{2\lambda\varphi z dy}{\sqrt{(1+dy^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a}}, \text{ wenn } \frac{1}{\sqrt{a}} \text{ eine Constante ist, und} \\ 2\lambda \frac{d}{z} \varphi z \sqrt{(1+dy^2)} - d\lambda = 0. \end{cases}$$

Eliminirt man zwischen diesen Gleichungen und der gegebenen Bedingungs-Gleichung

$$dz = 2g - 2\varphi z \sqrt{(1 + dy^2)}$$

die beiden Größen λ und z, so erhält man eine Gleichung zwischen x und y, welche die Gleichung der gesuchten Curve ist.

Die Rechnung ist der in der vorigen Aufgabe (§. 82. I.) ganz ähnlich, und man findet wie in (471.)

$$480. \quad \lambda = \frac{1}{2g\,dy}\sqrt{a} + \frac{b}{2g}$$

Setzt man diesen Werth in die erste Gleichung (488.), so erhält man eine Gleichung, die nur x, y und z enthält. Schafft man also zwischen derselben und der Bedingungs-Gleichung $\alpha = 0$, noch z weg, so erhält man die gesuchte Gleichung der Curve, zwischen x und y.

Für die Grenzen-Gleichungen findet man

$$490. \begin{cases} \dfrac{\delta \overset{0}{y}}{\sqrt{a}} + (1 + \overset{0}{\lambda})\,\delta \overset{0}{z} - b\,\delta \overset{0}{x} = 0 \text{ und} \\ \dfrac{\delta \overset{1}{y}}{\sqrt{a}} + (1 + \overset{1}{\lambda}\,\delta \overset{1}{z} - b\,\delta \overset{1}{x} = 0. \end{cases}$$

Ist die anfängliche Geschwindigkeit gegeben, so ist $\delta \overset{0}{z} = 0$, und die erste Grenzen-Gleichung ist

$$491. \quad \frac{\delta \overset{0}{y}}{\sqrt{a}} - b\,\delta \overset{0}{x} = 0.$$

Für die zweite Grenzen-Gleichung ist wieder der Coefficient zu $\delta \overset{1}{z}$, wie in der vorigen Aufgabe (384. IX.) gleich Null, also ist $1 + \overset{1}{\lambda} = 0$, und

$$492. \quad \overset{1}{\lambda} = -1,$$

weches b durch λ giebt (489.). Die zweite Grenzgleichung giebt, nachdem $1 + \overset{1}{\lambda} = 0$ gesetzt worden,

$$493. \quad \frac{\delta \overset{1}{y}}{\sqrt{a}} - b\,\delta \overset{1}{x} = 0.$$

Werden die Tangenten der Winkel, welche die Tangenten der

Grenzlinien im Anfangs- und Endpunkt der Bewegung mit der Axe der x machen, durch $(\overset{0}{dy})$ und $(\overset{1}{dy})$ bezeichnet, so erhält man, wie in (§. 284. XI. u. XII.),

494. $\delta\overset{0}{y} = \delta\overset{0}{x}\,(\overset{0}{dy})$ und $\delta\overset{1}{y} = \delta\overset{1}{x}\,(\overset{1}{dy})$,

welche Gleichung mit der gegenwärtigen Grenzen-Gleichung verbunden

495. $(\overset{0}{dy}) = b\sqrt{a}$ und $(\overset{1}{dy}) = b\sqrt{a}$

geben, woraus folgt, daß die Tangenten der beiden Grenzlinien am Anfangs- und Endpunkt der Bewegung mit einander parallel seyn müssen, wie bei der Linie des schnellsten Falles.

Dreizehntes Beispiel.

Von der kürzesten Linie zwischen gegebenen Grenzen im Raume.

286.

Wenn die Coordinaten der gesuchten Linie x, y und z sind, und y und z als abhängig von x betrachtet werden, so ist die erste Ableitung der Länge der Linie bekanntlich $= \sqrt{(1 + dy^2 + dz^2)}$, also ist hier

496. $v = \sqrt{(1 + dy^2 + dz^2)}$

diejenige Größe, deren Stammgröße ein Maximum oder Minimum seyn soll.

I. Da hier zwei von x abhängige Größen y und z vorkommen, so ist die Bedingungs-Gleichung für die Existenz des Maximums oder Minimums

$$\frac{d}{y}\,v\delta y + \frac{d}{dy}\,vd\delta y \ldots + \frac{d}{z}\,v\delta z + \frac{d}{dz}\,vd\delta z \ldots = 0 \ (\text{§. } 49.)$$

Nun ist $\frac{d}{y}\,v = 0$, $\frac{d}{z}\,v = 0$, $\frac{d}{dy}\,v = \frac{dy}{\sqrt{(1+dy^2+dz^2)}}$

$\frac{d}{dz}\,v = \frac{dz}{\sqrt{(1+dy^2+dz^2)}}$, $\frac{d}{d^2y}\,v = 0$, $\frac{d}{d^2z}\,v = 0$ rc. Es ist also

497. $d\frac{dy}{\sqrt{(1+dy^2+dz^2)}}\delta y + d\frac{dz}{\sqrt{(1+dy^2+dz^2)}}\delta z = 0.$

II. Sind die beiden Grenzen von einander unabhängig, so sind die Coefficienten von δy und δz einzeln gleich Null, also ist alsdann

$$d\frac{dy}{\sqrt{(1+dy^2+dz^2)}} = 0 \text{ und } d\frac{dz}{\sqrt{(1+dy^2+dz^2)}} = 0,$$

woraus folgt

498. $\frac{dy}{\sqrt{(1+dy^2+dz^2)}} = a$ und $\frac{dz}{\sqrt{(1+dy^2+dz^2)}} = b,$

wenn a und b die bei der Zurückleitung vorkommenden Constanten bezeichnen. Aus diesen beiden Ausdrücken folgt

$$\frac{dy}{a} = \frac{dz}{b} \text{ oder } dz = \frac{b}{a}dy, \text{ also } 1 + dy^2 + dz^2$$

$$= 1 + dy^2 + \frac{b^2}{a^2}dy^2 = \frac{dy^2}{a^2} \text{ oder } a^2 = (1 - a^2 - b^2)\, dy^2 \text{ und}$$

$dy = \frac{a}{\sqrt{(1 - a^2 - b^2)}}$. Also ist, wenn man die Stammgleichung nimmt,

499. $y = \frac{ax}{\sqrt{(1 - a^2 - b^2)}} + c.$

Eben so erhält man

500. $z = \frac{bx}{\sqrt{(1 - a^2 - b^2)}} + e.$

Die beiden Gleichungen (499. u. 500.) gehören einer graden Linie an. Also ist die kürzeste Linie im Raum zwischen gegebenen Grenzen unter allen Umständen eine grade.

III. Die Gleichung für die Grenzen ist in dem gegenwärtigen Fall

$$0 = \delta u = \left(\frac{d}{dy}v - d\frac{d}{d^2y}v \ldots\right)\delta v + \left(\frac{d}{d^2y}v \ldots\right)d\delta y \ldots$$

$$+ \left(\frac{d}{dz}v - d\frac{d}{d^2z}v \ldots\right)\delta z + \left(\frac{d}{d^2z}v \ldots\right)d\delta z \ldots$$

Setzt man hierin die obigen Werthe von $\frac{d}{dy}$ v ꝛc., so erhält man

$$501.\quad o = \delta u = \frac{dy}{\sqrt{(1+dy^2+dz^2)}}\,\delta y + \frac{dz}{\sqrt{(1+dy^2+dz^2)}}\,\delta z$$

oder, weil

$$\frac{dy}{\sqrt{(1+dy^2+dz^2)}} = a \text{ und } \frac{dz}{\sqrt{(1+dy^2+dz^2)}} = b \text{ war (498.)}$$

$$o = \delta u = a\,\delta y + b\,\delta z, \text{ oder vielmehr}$$

$$502.\quad \delta\overset{o}{u} - \delta\overset{1}{u} = a\,\delta\overset{o}{y} + b\,\delta\overset{o}{z} - a\,\delta\overset{o}{y} - b\,\delta\overset{1}{z} = o$$

Sind die Grenzen von einander ganz unabhängig, so ist einzeln $\delta\overset{o}{u} = o$ und $\delta\overset{1}{u} = o$, also ist dann

$$503.\left\{\begin{array}{l} a\,\delta\overset{o}{y} + b\,\delta\overset{o}{z} = o, \text{ und} \\ a\,\delta\overset{1}{y} + b\,\delta\overset{1}{z} = o. \end{array}\right.$$

287.

Erster Fall.

Die Grenzen sollen bestimmte Punkte seyn, so sind die Variations-Coefficienten $\delta\overset{o}{y}$, $\delta\overset{o}{z}$, $\delta\overset{1}{y}$, $\delta\overset{1}{z}$ sämmtlich Null, und die Bedingungs-Gleichung für die Grenzen wird von selbst erfüllt.

288.

Zweiter Fall.

I. Wären für die Grenzen bestimmte Linien gegeben, so würden die Grenz-Punkte variiren können, und folglich würde die Variation der Coordinaten x, y, z, und ihr Verhältniß für die Endpunkte, so wie es durch die gegebene Grenzen-Linien bestimmt wird, in Rechnung gebracht werden müssen.

In diesem Falle muß man zu δu die Größe $v\,\delta x$ hinzufügen, und $\delta y - dy\,\delta x$ statt dy, und $\delta z - dz\,\delta z$ statt δz setzen. Dieses giebt statt (501.)

$$\delta u = \frac{dy\,(\delta y - dy\,\delta x) + dz\,(\delta z - dz\,\delta z)}{\sqrt{(1 + dy^2 + dz^2)}} + v\,\delta x$$

und weil $v = \sqrt{(1 + dy^2 + dz^2)}$

$$\delta u = \frac{dy\,\delta y - dy^2\,\delta x + dz\,\delta z - dz^2\,\delta x + \delta x + dy^2\,\delta x + dz^2\,\delta x}{\sqrt{(1 + dy^2 + dz^2)}}$$

oder

$$504.\quad \delta u = \frac{\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z}{\sqrt{(1 + dy^2 + dz^2)}}$$

welches für die beiden Grenzen einzeln, weil $\overset{\circ}{\delta u} = 0$ und $\overset{1}{\delta u} = 0$ ist,

$$505.\quad \begin{cases} \overset{\circ}{\delta x} + \overset{\circ}{dy}\,\overset{\circ}{\delta y} + \overset{\circ}{dz}\,\overset{\circ}{\delta z} = 0 \text{ und} \\ \overset{1}{\delta x} + \overset{1}{dy}\,\overset{1}{\delta y} + \overset{1}{dz}\,\overset{1}{\delta z} = 0 \end{cases}$$

giebt.

II. Wären nun zu den Grenzen der kürzesten Linie zwei bestimmte Curven gegeben, deren Gleichungen für die erste Grenze

$$506.\quad \varphi\,(\overset{\circ}{x}y) = 0 \text{ und } \varphi'\,(xz) = 0$$

sind, so findet man, für die daraus folgenden nothwendigen Verhältnisse zwischen den Variations-Coefficienten in den Grenzen, durch eine ähnliche Rechnung wie oben im dritten Beispiel,

$$507.\quad \begin{cases} \overset{\circ}{\delta y} = (d\overset{\circ}{y})\,\overset{\circ}{\delta x} \text{ und} \\ \overset{\circ}{\delta z} = (d\overset{\circ}{z})\,\overset{\circ}{\delta x} \end{cases}$$

wenn $(d\overset{\circ}{y})$ und $(d\overset{\circ}{z})$ die Tangenten bedeuten, welche die Tangente der Grenz-Curve mit den Ebenen der xz und der xy macht.

Setzt man diese Werthe von $\overset{\circ}{\delta y}$ und $\overset{\circ}{\delta z}$ in (505.), so erhält man

$$508.\quad 1 + d\overset{\circ}{y}\,(d\overset{\circ}{y}) + d\overset{\circ}{z}\,(d\overset{\circ}{z}) = 0.$$

Für die andere Grenze findet man durch eine ähnliche Rechnung

509. $1 + \overset{1}{dy}\,(\overset{1}{dy}) + \overset{1}{dz}\,(\overset{1}{dz}) = 0.$

Nun sind bekanntlich die Gleichungen der Tangente einer beliebigen Curve von doppelter Krümmung, wenn die Coordinaten der Curve x und y und z heißen, von der Form:

$$y = xdy + \mu \text{ und } z = xdz + \nu,$$

also würde die Gleichung der Tangente der kürzesten Linie im ersten Grenz-Punkt

$$y = x\overset{o}{dy} + \mu \text{ und } z = x\overset{o}{dz} + \nu,$$

diejenige aber der Tangente der Grenz-Linien selbst, in eben dem Punkte,

$$y = x\,(\overset{o}{dy}) + \mu \text{ und } z = x\,(\overset{o}{dz}) + \nu$$

seyn. Der Cosinus des Winkels, den diese beiden Tangenten in dem Grenz Punkt, in welchen sie sich schneiden, mit einander machen, ist zufolge der (123sten Gleichung im 1sten Bande)

$$510. \quad \frac{1 + \overset{o}{dy}\,(\overset{o}{dy}) + \overset{o}{dz}\,(\overset{o}{dz})}{\sqrt{(1 + \overset{o}{dy}^2 + \overset{o}{dz}^2)}\,\sqrt{(1 + (\overset{o}{dy})^2 + (\overset{o}{dz})^2)}}$$

Hier in dem gegenwärtigen Fall aber ist die Größe $1 + \overset{o}{dy}\,(\overset{o}{dy}) + \overset{o}{dz}\,(\overset{o}{dz})$ gleich Null (508.), also ist der Cosinus jenes Winkels $= 0$, und folglich der Winkel ein rechter, mithin stehen die Tangenten der kürzesten Linie und der Grenz-Linie, im Grenz-Punkt auf einander senkrecht. Eben das gilt für die andere Grenze, und da nun die Tangenten der kürzesten Linie in die Linie selbst fallen, weil dieselbe eine grade ist, so folgt, daß die kürzeste Linie auf die Grenzen senkrecht stehet.

289.

Dritter Fall.

Wären die Grenzen der kürzesten Linie statt zweier bestimmten Curven, zwei bestimmte Flächen, deren Gleichungen

511. $\varphi\,(xyz) = X = 0$ und $\varphi^1\,(xyz) = Y = 0$

so müßte man das nothwendige Verhältniß zwischen den Va-

riations-Coefficienten δx, δy, δz an den Grenzen, aus diesen Gleichungen nehmen.

I. Für die erste Grenze erhält man, wenn man die Gleichung $X = o$ variirt:

$$512.\quad \frac{d}{x}X\,\delta\overset{\circ}{x} + \frac{d}{y}X\,\delta\overset{\circ}{y} + \frac{d}{z}X\,\delta\overset{\circ}{z} = o$$

welche Gleichung also mit der obigen, aus der Natur der Aufgabe folgenden Gleichung für die erste Grenze, $\delta\overset{\circ}{x} + d\overset{\circ}{y}\,\delta\overset{\circ}{y} + d\overset{\circ}{z}\,\delta\overset{\circ}{z} = o$ (505.) verbunden werden muß.

II. Aus der letzten Gleichung folgt $\delta\overset{\circ}{x} = - d\overset{\circ}{y}\,\delta\overset{\circ}{y} - d\overset{\circ}{z}\,\delta\overset{\circ}{z}$. Setzt man dieses in (512.), so erhält man

$$513.\quad \left(\frac{d}{y}X - d\overset{\circ}{y}\,\frac{d}{x}X\right)\delta\overset{\circ}{y} + \left(\frac{d}{z}X = d\overset{\circ}{z}\,\frac{d}{x}X\right)\delta\overset{\circ}{z} = o.$$

In dieser Gleichung sind die Variations-Coefficienten $\delta\overset{\circ}{y}$ und $\delta\overset{\circ}{z}$ von einander unabhängig, weil weiter keine Bedingung zwischen ihnen Statt findet; also sind einzeln die Coefficienten derselben gleich Null, folglich ist

$$\frac{d}{y}X - d\overset{\circ}{y}\,\frac{d}{x}X = o \text{ und } \frac{d}{z}X - d\overset{\circ}{z}\,\frac{d}{x}X = o,$$

woraus folgt

$$514.\quad \frac{d}{y}X - d\overset{\circ}{y}\,\frac{d}{x}X \text{ und } \frac{d}{z}X - d\overset{1}{z}\,\frac{d}{x}X$$

III. Die erste abgeleitete Gleichung von der Gleichung einer Fläche, und diejenige der Gleichung einer sie berührenden Ebene haben bekanntlich einerlei Coefficienten der Ableitungen der abhängigen Ordinate. Die erste abgeleitete Gleichung von $X = o$ für die erste Grenzen-Fläche ist

$$\frac{d}{x}X + \frac{d}{y}X\,\frac{d}{x}\overset{\circ}{y} + \frac{d}{z}X\,\frac{d}{x}\overset{\circ}{z} = o.$$

Man setze die Gleichung der dieselbe berührenden Ebene

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

so daß die abgeleitete Gleichung von dieser

$$\frac{1}{a} + \frac{\frac{d}{x}y}{b} + \frac{\frac{d}{x}y}{c} = 1$$

In beiden Gleichungen sollen die Coefficienten zu den Ableitungen der abhängigen Ordinate gleich seyn, also ist

$$\frac{d}{x}X = \frac{1}{a}, \frac{d}{y}X = \frac{1}{b} \text{ und } \frac{d}{z}X = \frac{1}{c}$$

und die Gleichung der berührenden Ebene im Punkte $\overset{\circ}{x}$, $\overset{\circ}{y}$, $\overset{\circ}{z}$ ist

$$515. \quad \overset{1}{x}\frac{d}{x}X + \overset{1}{y}\frac{d}{y}X + \overset{1}{z}\frac{d}{z}X = 1.$$

Setzt man hierin die obigen, aus der Natur der Aufgabe folgenden Werthe von $\frac{d}{x}X$ und $\frac{d}{z}X$ (514.), so erhält man

$$\overset{\circ}{x}\frac{d}{x}X + \overset{\circ}{y}d\overset{\circ}{y}\frac{d}{x}X + \overset{\circ}{z}d\overset{\circ}{z}\frac{d}{x}X = 1, \text{ oder}$$

$$516. \quad \overset{\circ}{x} + \overset{\circ}{y}d\overset{\circ}{y} + \overset{\circ}{z}d\overset{\circ}{z} = \frac{1}{\frac{d}{x}X}$$

für die Gleichung der berührenden Ebene in Punkte $\overset{\circ}{x}$, $\overset{\circ}{y}$, $\overset{\circ}{z}$.

Diese Ebene steht auf einer graden Linie im Raume senkrecht, deren Gleichungen von der Form:

$$517. \quad y = xd\overset{1}{y} + \mu \text{ und } z = xd\overset{1}{z} + \nu$$

sind, wie leicht aus (§. 250. Ir Band) zu sehen. Eine solche grade Linie aber kommt mit der Tangente der kürzesten Linie, oder mit dieser Linie selbst, weil sie eine grade und folglich mit ihrer Tangente Eins und Dasselbe ist, überein. Also steht die kürzeste Linie auf der ersten Grenzen-Fläche senkrecht.

IV. Das nämliche gilt von der zweiten Grenzen-Fläche; also steht die kürzeste Linie auf den beiden Grenzen-Flächen senkrecht.

Vierzehntes Beispiel.

Von der kürzesten Linie in einer gegebenen Fläche zwischen gegebenen Grenzen.

290.

I. Es sey

$$518. \quad \varphi\,(xyz) = X = o$$

die Gleichung der gegebenen Fläche, in welcher die kürzeste Linie liegen soll, so folgt daraus, wenn die Grenzpunkte fest sind, und also $\delta x = o$ ist,

$$519. \quad \frac{d}{y} X\,\delta y + \frac{d}{z} X\,\delta z = o.$$

Die Gleichung für die Existenz des Maximums oder Minimums ist

$$520. \quad \delta y\, d\,\frac{dy}{v} + \delta z\, d\,\frac{dz}{v} = o \;(497.)$$

Aus (519.) folgt $\frac{\delta y}{\delta z} = -\frac{\frac{d}{z} X}{\frac{d}{y} X}$. Aus (520.) folgt $\frac{\delta y}{\delta z} = -\frac{d\,\frac{dz}{v}}{d\,\frac{dy}{v}}$

Also ist $\frac{\frac{d}{z} X}{\frac{d}{y} X} = \frac{d\,\frac{dz}{v}}{d\,\frac{dy}{v}}$, oder

$$521. \quad \frac{d}{z} X\; d\,\frac{dy}{v} = X.\; d\,\frac{dz}{v}$$

woraus die Gleichung der kürzesten Linie in der gegebenen Fläche $X = o$ genommen werden muß.

II. Die Grenzen-Gleichung ist

$$522. \quad \delta u = \frac{dy\,\delta y + dz\,\delta z}{v} = o,$$

wenn x nicht variirt (501.) und

$$523.\quad \delta u = \frac{\delta x + dy\delta y + dz\delta z}{v} = 0,$$

wenn x variirt (504.)

III. Man müßte nun das eine Verhältniß der Variations-Coefficienten aus der Gleichung der gegebenen Fläche, das andere aus der Gleichung der gegebenen, in der Fläche liegenden Grenzen-Linie nehmen, und verfahren wie in dem vorigen Beispiel. Allein die Rechnung ist nicht zu wiederholen nöthig, weil die Bestimmung, die die Fläche giebt, in welcher sowohl die kürzeste Linie als die Grenzen Linien liegen sollen, Hinsichts der letzten, nothwendig dieselbe ist, wie in dem vorigen Beispiel, indem die Grenzen-Linien dieses Beispiels nothwendig in einer Fläche liegen müssen, welche hier diejenige ist, in welcher sich die kürzeste Linie befindet. Man kann also, da die Gestalt der kürzesten Linie und ihrer Grenze auf einander keinen Einfluß haben, von der gegebenen Fläche abstrahiren, ohne daß sich das Resultat verändert. Dieses Resultat besteht also darin, daß die kürzeste Linie auf den in der gegebenen Fläche liegenden gegebenen Grenzen-Linien senkrecht steht.

Funfzehntes Beispiel.

Von der kleinsten Fläche zwischen gegebenen Grenzen.

291.

Der Ausdruck der Ableitung einer Fläche, deren Coordinaten x, y und z sind, von welchen die beiden letzten als abhängig von der ersten betrachtet werden, ist wie bekannt

$$524.\quad v = \sqrt{\left(1 + \frac{d}{x} z^2 + \frac{d}{y} z^2\right)}$$

Hiervon also soll die Stammgröße ein Maximum oder Minimum seyn.

Der Fall gehört für (250.), und es ist hier

$$\frac{d}{z} v = p = 0,\ \frac{d}{\frac{d}{x} z} v = q = \frac{\frac{d}{x} z}{v},\ \frac{d}{\frac{d}{y} z} v = q^1 = \frac{\frac{d}{y} z}{v},\ \frac{d}{\frac{d^2}{x^2} z} v \text{ etc.}$$

= o, also giebt hier die allgemeine Bedingungs-Gleichung (393.) für die Existenz des Maximums oder Minimums, welche $p - \frac{d}{x} q - \frac{d}{y} q^{1} + \frac{d^2}{x^2} v \ldots = o$ war,

$$\frac{d}{x} \frac{\frac{d}{x} z}{v} + \frac{d}{y} \frac{\frac{d}{y} z}{v} = o \text{ oder}$$

$$\frac{\frac{d^2}{x^2} z}{v} - \frac{\frac{d}{x} z \frac{d}{x} v}{v^2} + \frac{\frac{d^2}{y^2} z}{v.} - \frac{\frac{d}{y} z \frac{d}{y} v}{v^2} = o, \text{ oder}$$

$$425. \quad v \left(\frac{d^2}{x^2} z + \frac{d^2}{y^2} z\right) - \left(\frac{d}{x} z \frac{d}{x} v + \frac{d}{y} z \frac{d}{y} v\right) = o.$$

Ferner ist

$$\frac{d}{x} v = \frac{d}{x} \sqrt{(1 + \frac{d}{x} z^2 + \frac{d}{y} z^2)} = \frac{\frac{d}{x} z \frac{d^2}{x^2} z + \frac{d}{y} z \frac{d^2}{xy} z}{v}$$

$$\text{und } \frac{d}{y} v = \frac{\frac{d}{x} z \frac{d^2}{xy} z + \frac{d}{y} z \frac{d^2}{y^2} z}{v}$$

Dieses in (525.) gesetzt, giebt

$$o = v \left(\frac{d^2}{x^2} z + \frac{d^2}{y^2} z\right)$$

$$- \left(\frac{d}{x} z \frac{\frac{d}{x} z \frac{d^2}{x^2} z + \frac{d}{y} z \frac{d^2}{y^2} z}{v} + \frac{d}{y} z \frac{\frac{d}{x} z \frac{d^2}{xy} z + \frac{d}{y} z \frac{d^2}{xy} z}{v}\right)$$

oder

$$v^2 \left(\frac{d^2}{x^2} z + \frac{d^2}{y^2} z\right)$$

$$- \left(\frac{d}{x} z^2 \frac{d^2}{x^2} z + 2 \frac{d}{x} z \frac{d}{y} z \frac{d^2}{xy} z + \frac{d}{y} z^2 \frac{d^2}{y^2} z\right) = o,$$

oder, weil $v^2 = 1 + \frac{d}{x} z^2 + \frac{d}{y} z^2$ ist,

$$\frac{d^2}{x^2}z + \frac{d^2}{y^2}z + \frac{d}{x}z^2\,\frac{d^2}{x^2}z + \frac{d}{x}z^2\,\frac{d^2}{y^2}z + \frac{d}{y}z^2\,\frac{d^2}{x^2}z + \frac{d}{y}z^2\,\frac{d^2}{y^2}z$$

$$-\frac{d}{x}z^2\,\frac{d^2}{x^2}z - 2\,\frac{d}{x}z\,\frac{d}{y}z\,\frac{d^2}{xy}z - \frac{d}{y}z^2\,\frac{d^2}{y^2}z = 0 \text{ oder}$$

$$526. \quad \frac{d^2}{x^2}z\left(1 + \frac{d}{y}z^2\right)$$

$$+\frac{d^2}{y^2}z\left(1 + \frac{d}{x}z^2\right) - 2\frac{d}{x}z\,\frac{d}{y}z\,\frac{d^2}{xy}z = 0$$

woraus durch Zurückleitung die Gleichung der kleinsten Fläche entwickelt werden muß.

292.

Ich will weder diese Untersuchungen weiter fortsetzen, noch die Beispiele mehr vervielfältigen, weil sonst der Umfang dieser Abhandlung allzu groß werden würde. Mein Zweck war nur, die Elemente des Variations-Calculs so anschaulich und einfach als möglich vorzutragen, und dazu scheint das Bisherige hinreichend.

11.

Von der Entwickelung zusammengesetzter Ausdrücke in Reihen durch die Ableitungs-Rechnung.

293.

Man kann unstreitig für eine gegebene, z. B. von x oder x und k abhängende Größe $y = fx$ oder $f(x+k)$, irgend einen willkührlichen andern Ausdruck, z. B. eine Reihe mit unbestimmten Coefficienten, die nach einem gewissen Gesetz nach x oder k fortschreitet, setzen. Ist die angenommene Reihe möglich, so werden die unbestimmten Coefficienten, die darin vorkommen, angegeben werden können, im andern Fall nicht. Man kann also, z. B. wenn sich in fx die Größe x um k verändert, für $f(x+k)$ setzen

$$f(x+k) = fx + pk + qk^2 + rk^3,$$

hier hängen bekanntlich die Coefficienten p, q, r..., der Reihe nach, alle auf eine ähnliche Art und eben so von einander ab, wie der erste Coefficient p von der Stammgröße fx, weshalb man die Reihe auch so schreiben kann

$$527. \quad f(x+k) = fx + k\,dfx + \frac{k^2}{2}\,d^2fx + \frac{k^3}{3}\,d^3fx \ldots$$

In sofern in dieser Reihe die Coefficienten dfx, d^2fx... zu k, $\frac{k^2}{2}$... möglich sind und angegeben werden können, ist unstreitig die Gestalt der Reihe statthaft. Dieselbe hat alsdann denselben Werth wie die unentwickelte Größe $f(x+k)$.

Diese Reihe ist die sogenannte Taylorsche.

294.

Im Vorbeigehen möge bemerkt werden, daß man der Reihe für $f(x + k)$ die merkwürdige Gestalt

$$f(x+k) = fx + \frac{k}{d} 1 . \frac{d}{x} fx + \frac{k^2}{d^2} 1 . \frac{d^2}{x^2} fx + \frac{k^3}{d^3} 1 . \frac{d^3}{k^3} fx \ldots$$

geben kann; denn $\frac{k}{d} 1$, oder die Stammgröße von 1, als Ableitung von k betrachtet, ist k; $\frac{k^2}{d^2} 1$ oder $\frac{k}{d} k$, oder die Stammgröße von k nach k, ist $\frac{k^2}{2}$; $\frac{k^3}{d^3} 1$ oder $\frac{k}{d} \frac{k^2}{2}$ oder die erste Stammgröße von $\frac{k^2}{2}$ nach k, ist $\frac{k^3}{2.3}$ u. s. w.

Diese Gestalt der Reihe ist deshalb merkwürdig, weil daraus folgt, daß in allen Gliedern die Ableitungs- und Zurückleitungs-Operation gleichen Schritt hält, und daß von den beiden Factoren jedes Gliedes, der eine eben so weit nach x ab, als der andere nach k zurückgeleitet ist.

295.

Die Taylorsche Reihe für $f(x + k)$ kann man nun auf verschiedene Weise geschickt machen, eine beliebige von x abhängende Größe fx, in eine Reihe die nach Potenzen von x fortschreitet, zu entwickeln. In der im ersten Bande befindlichen Abhandlung über die approximative Zurückleitung, sind dergleichen Verwandlungen erwähnt worden. Hier soll nur der beiden gedacht werden, wenn man $k = - x$ und wenn man $x = 0$ und $k = x$ setzt. Die erste giebt

$$fo = fx - xdfx + \frac{x^2}{2} d^2 fx - \frac{x^3}{2.3} d^3 fx \ldots$$

oder weil fo eine Constante, z. B. a ist,

$$528. \quad fx = a + xdfx - \frac{x^2}{2} d^2 fx - \frac{x^2}{2.3} d^3 fx \ldots$$

die andere giebt

$$529. \quad fx = fox + xdfox + \frac{x^2}{2} d^2 fox + \frac{x^3}{2.3} d^3 fox \ldots$$

wenn

wenn man durch $f o x$, $d f o x \ldots$ andeutet, daß innerhalb der Größen $f x$, $d f x \ldots$, $x = o$ gesetzt werden soll.

296.

Bekanntlich sind diese beiden Reihen (528.) und (529.) sehr nützlich, um beliebige zusammengesetzte Größen nach x zu entwickeln, weil zur Entwickelung nichts weiter als die Ableitungs-Operation nöthig ist, die in jedem Fall, ohne Schwierigkeit ausgeübt werden kann. Allein man macht die Reihen noch viel interessanter und nützlicher, wenn man sie auf zwiefach abhängige Größen oder Functionen der zweiten Ordnung, nämlich auf Größen von der Art wie $f\varphi x$ anwendet. Dergleichen Größen sind z. B. $\log \sin x$, $\log \cos x$, $(\cos x)^m$, $(\log x)^m$ und dergleichen. Sie dienen dann zur unmittelbaren Entwickelung dieser Ausdrücke. Auch wenn z. B. $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \ldots$ ist, so daß $y = f x$ und umgekehrt $x = \varphi y$, so ist $x = \varphi f x$ und dergleichen, und die Reihen dienen zur Umkehrung der gegebenen Reihen. Die allgemeine Entwickelungs-Reihe von $f\varphi x$ giebt also Mittel an die Hand, um durch die bloße Ableitungs-Operation die mannigfaltigsten Entwickelungen zu bewerkstelligen. Von der Entwickelung solcher Functionen zweiter Ordnung soll hier die Rede seyn.

297.

Es kommt alles darauf an $f\varphi(x + k)$, wie $f(x + k)$, in eine Reihe nach steigenden Potenzen von k zu entwickeln; denn hernach darf man nur, um $f\varphi x$ zu finden, entweder $k = - x$, oder $x = o$ und $k = x$ setzen.

Man bezeichne φx durch z und $f z$ durch u, so daß

530. $f\varphi x = f z = u$,

so geht z, wenn man $x + k$ statt x setzt, in

531. $z + \Delta z = z + k d z + \frac{k^2}{2} d^2 z \ldots$

über; folglich geht u in

532. $u + \Delta u = u + \Delta z \frac{d}{z} u + \frac{\Delta z^2}{2} \frac{d^2}{z^2} u + \frac{\Delta z^3}{2.3} \frac{d^3}{z^3} u \ldots$

über. Substituirt man in diesen Ausdruck den Werth von Δz, der aus dem vorigen (531.) folgt, nämlich $\Delta z = k\,dz + \frac{k^2}{2} d^2z \ldots$ so erhält man

$$u + \Delta u = u + \left(k\,dz + \frac{k^2}{2} d^2z + \frac{k^3}{2.3} d^3z \ldots\right) \frac{d}{z} u$$
$$+ \tfrac{1}{2} \left(k\,dz + \frac{k^2}{2} d^2z + \frac{k^3}{2.3} d^3z \ldots\right)^2 \frac{d^2}{z^2} u$$
$$+ \frac{1}{2.3} \left(k\,dz + \frac{k^2}{2} d^2z \ldots\right)^3 \frac{d^3}{z^3} u \ldots$$

oder

$$533.\quad u + \Delta u = u + k \frac{d}{z} udz + \frac{k^2}{2} \left(\frac{d}{z} udz^2 + \frac{d^2}{z^2} udz^2\right)$$
$$+ \frac{k^3}{2.3} \left(\frac{d}{z} ud^3z + 3 \frac{d^2}{z^2} udzd^2z + \frac{d^3}{z^3} udz^3\right) \ldots$$

Es ist leicht zu sehen, daß die Coefficienten von $k, \frac{k^2}{2}, \frac{k^3}{2.3} \ldots$ alle auf einerlei Weise von einander abhängen; denn da alle die Größen $\frac{d}{z} u, \frac{d^2}{z^2} u \ldots dz, d^2z \ldots$ von x abhängen, so erhält man, wenn man z. B. $x + k$ statt x in den ersten Coefficienten $\frac{d}{z} udz$ setzt, $d\left(\frac{d}{z} u\right) dz + \frac{d}{z} u\, d(dz)$ und weil $d(u) = \frac{d}{z} udz$ war, und folglich $d\left(\frac{d}{z} u\right) = \frac{d^2}{z^2} udz$ ist, $\frac{d^2}{z^2} udz^2 + \frac{d}{z} ud^2z$ für den zweiten Coefficienten, eben wie in der Reihe (533.). Proben mit einzelnen Coefficienten geben zwar keinen allgemeinen Beweis, allein ein solcher ist auch nicht von den Coefficienten selbst nöthig. Der Beweis liegt vielmehr darin, daß ganz allgemein

$$fx = fx + k\,dfx + \frac{k^2}{2} d^2fx + \frac{k^3}{2.3} d^3fx \ldots$$

ist, das heißt in dem Satze, daß die Coefficienten zu k,

$\frac{k^2}{2}, \frac{k^3}{2 \cdot 3} \ldots$ immer auf einerlei Weise von einander abhängen, was auf immer fx seyn mag. Denn da auch $f\varphi x$ durchaus nichts anders ist als eine von x abhängende Größe, so folgt, daß auch in $f\varphi\,(x + k)$ die Coefficienten zu $k, \frac{k^2}{2}, \frac{k^3}{2 \cdot 3} \ldots$ alle auf einerlei Weise von einander abhängen müssen, und es kommt nur auf den Ausdruck des ersten Coefficienten, nämlich desjenigen zu k an. So wie dieser aus u gefunden wird, so werden alle Folgenden, der Reihe nach, aus einander gefunden.

Dieser erste Coefficient ist $\frac{d}{z}\,u\,dz$; also darf man, um daraus den zweiten zu finden, nur die Größen $\frac{d}{z}\,u$ und dz wieder einzeln als abhängig von x betrachten, und zwar die erste $\frac{d}{z}\,u$ als mittelbar von x abhängig durch z, wie u es ist, die andere dz als unmittelbar abhängig von x, wie z u. s. w.

298.

Weder diese Operation, noch die Entwickelung der Reihe für $f\varphi\,(x + k)$, auf die Weise wie (533), hat die geringste Schwierigkeit, allein es kommt auf das allgemeine Glied, das heißt auf einen willkührlichen $n$ten Coefficienten an, der nicht so leicht darzustellen ist, weil, wie man bei der wirklichen Berechnung einiger Coefficienten bald sieht, das Gesetz, nach welchem die Coefficienten gebildet werden, nicht unmittelbar in die Augen fällt.

Man schreibe nämlich, der Kürze wegen statt $\frac{d}{z}\,u$, $\frac{d^2}{z^2}\,u \ldots$ bloß du, d^2u, welches angeht, wenn man annimmt, daß sich d überall, wo es vor u steht, auf z, hingegen überall, wo es vor z steht, auf x beziehen soll, so erhält man, nach der oben angezeigten Operations-Regel:

$$534.\begin{cases}\frac{d}{x}(u) = dudz \\ \frac{d^2}{x^2}(u) = d^2udz^2 + dud^2z \\ \frac{d^3}{x^3}(u) = d^3udz^3 + 3d^3udzd^2z + dud^3z \\ \frac{d^4}{x^4}(u) = d^4udz^4 + 6d^3udz^2d^2z + 3d^2ud^2z^2 + 4d^2udzd^3z \\ \qquad + dud^4z \\ \frac{d^5}{x^5}(u) = d^5udz^5 + 10d^4udz^3d^2z + 15d^3udzd^2z^2 \\ \qquad + 10d^3udz^2d^3z + 10d^2ud^2zd^3z + 5d^2udzd^4z \\ \qquad + dud^5z \text{ ꝛc.}\end{cases}$$

Schon beim vierten und fünften Coefficienten sieht man das Bildungs-Gesetz nicht mehr deutlich, und ohne dieses Gesetz zu kennen findet man bald, wenn man nur noch etwas weiter geht, Schwierigkeiten, wenigstens wird die Berechnung bald sehr mühsam. Das allgemeine Bildungs-Gesetz ist daher nothwendig. Ich bediene mich, um dasselbe zu finden, folgendes Verfahrens.

299.

I. Man lasse willkürhlich, vom ersten Coefficienten ab, das als Factor hinzugekommene dz weg, so daß man annimmt $\frac{d^2}{z^2}u$ sey nicht gleich d^2udz, wie es wirklich ist, sondern bloß d^2u, so erhält man

$$535.\begin{cases}\frac{d}{x}(u) = dudz \\ \frac{d^2}{x^2}(u) = d^2udz + dud^2z \\ \frac{d^3}{x^3}(u) = d^3udz + 2d^2ud^2z + dud^3z \\ \frac{d^4}{x^4}(u) = d^4udz + 3d^3ud^2z + 3d^2ud^3z + dud^4z \\ \frac{d^5}{x^5}(u) = d^5udz + d^4ud^2z + 6d^3ud^3z + 4d^2ud^4z \\ \qquad + dud^5z \text{ ꝛc.}\end{cases}$$

Hier ist das Gesetz der Fortschreitung deutlich, denn da, wie leicht aus der Operation selbst zu sehen, jeder Zahlen-Coefficient die Summe des unmittelbar darüber und des diesem unmittelbar vorhergehenden Coefficienten ist, so folgt, daß die sämmtlichen Coefficienten die Binomial-Coefficienten zu einem Exponenten sind, der um Eins niedriger ist, als die Ordnung der Ableitung, so daß also allgemein

$$536.\quad \frac{d^n}{x^n}(u) = d^n udz + n-1.\, d^{n-1}ud^2z + \frac{n-1.\, n-2}{2} d^{n-2}ud^3z \ldots$$

II. Diese Ausdrücke für die Ableitung von u sind nun, bis auf den ersten, alle unvollständig. Um sie zu vervollständigen, müßte man d^2udz statt d^2u und was daraus für d^2u, $d^4u \ldots$ folgt, setzen; denn dz wurde vorhin weggelassen. Man lasse aber wieder, schon für das folgende d^3u, das dz weg, und setze bloß

d^2udz statt d^2u,

$d^3udz + d^2ud^2z$ statt d^3u,

$d^4udz + 2d^3ud^2z + d^2ud^3z$ statt d^4u

$d^5udz + 3d^4ud^2z + 3d^3ud^3z + d^2ud^4z$ statt d^5u

u. s. w., so erhält man

$$536.\quad \begin{cases} \frac{d}{x}(u) = dudz \\ \frac{d^2}{x^2}(u) = d^2udzdz + dud^2z \\ \frac{d^3}{x^3}(u) = (d^3udz + d^2ud^2z)dz + 2d^2udzd^2z + dud^3z \\ \frac{d^4}{x^4}(u) = (d^4udz + 2d^3ud^2z + d^2ud^3z)\,dz + 3(d^3udz \\ \qquad + d^2ud^2z)d^2z + 3d^2udzd^3z = dud^4z \\ \frac{d^5}{x^5}(u) = (d^5udz + 3d^4ud^2z + 3d^3ud^3z + d^2ud^4z)\,dz \\ \qquad + 4(d^4udz + 2d^3ud^2z + d^2ud^3z)d^2z \\ \qquad + 6(d^3udz + d^2ud^2z)\,d^3z \\ \qquad + 4\,d^2udzd^4z \\ \qquad + dud^5z \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

III. Diese neuen Ausdrücke sind wiederum vom zweiten ab unvollständig, denn man hätte sollen d^3udz statt d^3u und das was daraus für d^4u, $d^5u\ldots$ folgt, setzen. Um sie zu vervollständigen, hole man solches nach, lasse aber wieder schon für das folgende d^4u, dz weg und setze also bloß

d^3udz statt d^3u,

$d^4udz + d^3ud^2z$ statt d^4u,

$d^5udz + 2d^4ud^2z + d^3ud^3z$ statt d^5u u. s. w.

so erhält man

$$537\left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{x}(u) = dudz\\
&\frac{d^2}{x^2}(u) = d^2udz.dz + dud^2z\\
&\frac{d^3}{x^3}(u) = (d^3udz.dz + d^2ud^2z)dz + 2d^2udzd^2z + dud^3z\\
&\frac{d^4}{x^4}(u) = ((d^4udz + d^3ud^2z)dz + 2d^3udzd^2z + d^2ud^3z)dz\\
&\qquad + 3(d^3udz.dz + d^3ud^2z)d^2z + 3d^2udzd^3z + dud^4z\\
&\frac{d^5}{x^5}(u) = ((d^5udz + 2d^4ud^2z + d^3ud^3z)dz + 3(d^4udz\\
&\qquad + d^2ud^2z)d^2z + 3d^3udzd^3z + d^2ud^4z)dz
\end{aligned}\right.$$

$$+ 4((d^4udz + d^3ud^2z)dz + 2d^3udzd^2z + d^2ud^3z)d^2z$$
$$+ 6(d^3udzdz + d^2ud^2z)d^3z$$
$$+ 4(d^2udzd^4z)$$
$$+ dud^5z$$

IV. Auch diese Ausdrücke sind noch, vom dritten ab, unvollständig, denn man hätte sollen d^4udz statt d^4u und das, was daraus für d^5u ꝛc. folgt, setzen. Um sie zu vervollständigen, setze man d^4udz statt d^4u, lasse aber schon wieder für das folgende d^5u, dz weg, und setze also bloß

d^4udz statt d^4u,

$d^5udz + d^4ud^2z$ statt d^5u ꝛc.

so erhält man

$$
538.\left\{
\begin{aligned}
&\frac{d}{x}(u) = dudz \\
&\frac{d^2}{x^2}(u) = d^2udzdz + dud^2z \\
&\frac{d^3}{x^3}(u) = (d^3udzdz + d^2ud^2z)dz + 2d^2udzd^2z + dud^3z \\
&\frac{d^4}{x^4}(u) = ((d^4udzdz + d^3ud^2z)dz + 2d^3udzd^2z \\
&\qquad\qquad + d^2ud^3z)dz \\
&\qquad + 3(d^3udzdz + d^2ud^2z)d^2z \\
&\qquad + 3d^2udzd^3z \\
&\qquad + dud^4z \\
&\frac{d^5}{x^5}(u) = (((d^5udz + d^4ud^2z)dz + 2d^4udzd^2z + d^3ud^3z)dz \\
&\qquad\qquad + 3(d^4udzdz + d^3ud^2z)d^2z + 3d^3udzd^2z \\
&\qquad\qquad + d^2ud^4z)dz \\
&\qquad + 4((d^4udzdz + d^3ud^2z)dz + 2d^3udzd^3z \\
&\qquad\qquad + d^2ud^3z)d^2z \\
&\qquad + 6(d^3udzdz + d^2ud^2z)d^3z \\
&\qquad + 4d^2udzd^4z \\
&\qquad + dud^5z
\end{aligned}
\right.
$$

V. Diese Ausdrücke sind noch vom vierten ab unvollständig, denn man hätte sollen d^5udz statt d^5u und was daraus für d^6u 2c. folgt, setzen. Um die Ausdrücke nicht noch einmal abzuschreiben, denke man sich zu dem vorigen d^5u, welches in $\frac{d^5}{x^5}(u)$ vorkommt, dz hinzu, so sind nunmehr die fünf ersten Coefficienten ganz vollständig.

300.

Aus diesen fünf ersten Coefficienten läßt sich nun das Bildungs-Gesetz der übrigen Coefficienten leicht abnehmen.

Man erhöhe z. B. den Zeiger von d in $\frac{d}{x}(u)$ um 1, multiplicire mit dz, und füge du mit d^2z multiplicirt hinzu, so erhält man $\frac{d^2}{x^2}(u)$.

Man erhöhe ferner den Zeiger von d in d^2u um 1, multiplicire mit dz, erhöhe den Zeiger von d in $\frac{d}{x}(u)$ um 1, multiplicire mit d^2z und mit dem zweiten Binomial-Coefficienten zum Exponenten 2, und füge du, mit d^3z multiplicirt, hinzu, so erhält man $\frac{d^3}{x^3}(u)$ u. s. w.

301.

So folgen die Größen $\frac{d}{x}(u), \frac{d^2}{x^2}(u), \frac{d^3}{x^3}(u)$ .. aus einander. Allein auch ohne die vorhergehenden kann man jede für sich bilden, wenn man von der rechten Seite der Ausdrücke anfängt. Z. B. die fünfte Größe $\frac{d^5}{x^5}(u)$.

Das erste Glied derselben ist dud^5z.

Man erhöhe d zu u um 1 und multiplicire mit dz und mit dem ersten Binomial-Coefficienten zum Exponenten 4; den Zeiger von d vor z aber erniedrige man um 1, so erhält man das zweite Glied $4d^2udzd^4z$.

Man erhöhe, ohne Rücksicht auf den Zahlen-Coefficienten und die Ableitung von z im zweiten Gliede, den Zeiger von d zu u, und multiplicire mit dz. Im ersten Gliede thue man dasselbe, multiplicire aber mit d^2z. Darauf erniedrige man im zweiten Gliede den Zeiger von d zu z um 1, im ersten Gliede um 2, und multiplicire alles zusammen mit dem zweiten Binomial-Coefficienten zum Exponenten 4, so erhält man das dritte Glied $6(d^3udzdz + d^2ud^2z)d^2z$.

Auf eine ähnliche Weise erhält man das vierte Glied, wenn man noch auf das Hinzutreten der Binomial-Coefficienten achtet, nämlich

$$4[(d^4udzdz + d^3ud^2z)dz + 2d^3udzd^2z + d^2ud^3z)d^2z$$

und das fünfte Glied

$$[((d^5udzdz + d^4ud^2z)dz + 2d^4udzd^2z + d^3ud^3z)dz + 3(d^4udzdz + d^3ud^2z)d^2z + 3d^3udzd^3z + d^2ud^2z]dz$$

Die Summe dieser Glieder giebt $\frac{d^5}{x^5}(u)$ wie in (538.).

302.

Noch deutlicher läßt sich die Bildung der Größen $\frac{d}{x}(u)$, $\frac{d^2}{x^2}(u)$ ꝛc. vorstellen, wenn man der Kürze wegen du, d^2u … durch $\overset{1}{u}$, $\overset{2}{u}$ … und dz, d^2z … durch $\overset{1}{z}$, $\overset{2}{z}$ … bezeichnet. Dieses giebt z. B.

$$\frac{d^5}{x^5}(u) = \overset{1}{u}\overset{5}{z}$$

$$+ 4\overset{2}{u}\overset{1}{z}\overset{4}{z}$$

$$+ 6(\overset{3}{u}\overset{1}{z}\overset{1}{z} + \overset{2}{u}\overset{2}{z})\overset{3}{z}$$

$$+ 4[(\overset{4}{u}\overset{1}{z}\overset{1}{z} + \overset{3}{u}\overset{2}{z})\overset{1}{z} + 2\overset{3}{u}\overset{1}{z}\overset{2}{z} + \overset{2}{u}\overset{3}{z}]\overset{2}{z}$$

$$+ [((\overset{5}{u}\overset{1}{z}\overset{1}{z} + \overset{4}{u}\overset{2}{z})\overset{1}{z} + 2\overset{4}{u}\overset{1}{z}\overset{2}{z} + \overset{3}{u}\overset{3}{z})\overset{1}{z} + 3(\overset{4}{u}\overset{1}{z}\overset{1}{z} + \overset{3}{u}\overset{2}{z})\overset{2}{z}$$

$$+ 3\overset{3}{u}\overset{1}{z}\overset{3}{z} + \overset{2}{u}\overset{4}{z}]\overset{1}{z}.$$

Hält man dieses gegen

$$\frac{d^4}{x^4}(u) = \overset{1}{u}\overset{4}{z}$$

$$+ 3\overset{2}{u}\overset{1}{z}\overset{3}{z}$$

$$+ 3(\overset{3}{u}\overset{1}{z}\overset{1}{z} + \overset{2}{u}\overset{2}{z})\overset{2}{z}$$

$$+ [(\overset{4}{u}\overset{1}{z}\overset{1}{z} + \overset{3}{u}\overset{2}{z})\overset{1}{z} + 2\overset{3}{u}\overset{1}{z}\overset{2}{z} + \overset{2}{u}\overset{3}{z})\overset{2}{z}$$

so ist leicht zu sehen, daß zum Beispiel $\frac{d^6}{x^6}(u)$ folgenden Ausdruck haben werde

$$539. \quad \frac{d^6}{x^6}(u) = \overset{1}{u}\overset{6}{z}$$

$$+ 5\overset{2}{u}\overset{1}{z}\overset{5}{z}$$

$$+ 10\,\overset{3}{u}\overset{1}{z}\overset{1}{z} + \overset{2}{u}\overset{2}{z})\overset{4}{z}$$

$$+ 10[(\overset{4}{u}\overset{1}{z}\overset{1}{z} + \overset{4}{u}\overset{2}{z})\overset{1}{z} + 2\overset{3}{u}\overset{1}{z}\overset{2}{z} + \overset{2}{u}\overset{3}{z}]\overset{3}{z}$$

$$+ 5[((\overset{5}{u}\overset{1}{z}\overset{1}{z} + \overset{4}{u}\overset{2}{z})\overset{1}{z} + 2\overset{4}{u}\overset{1}{z}\overset{2}{z} + \overset{2}{u}\overset{3}{z})\overset{1}{z} + 3(\overset{4}{u}\overset{1}{z}\overset{1}{z}$$

$$+ \overset{3}{u}\overset{2}{z})\overset{2}{z} + 3\overset{3}{u}\overset{1}{z}\overset{3}{z} + \overset{2}{u}\overset{4}{z}]\overset{2}{z}$$

$$+ [(((\overset{6}{u}\overset{1}{z}\overset{1}{z} + \overset{5}{u}\overset{2}{z})\overset{1}{z} + 2\overset{5}{u}\overset{1}{z}\overset{2}{z} + \overset{4}{u}\overset{3}{z})\overset{1}{z} + 3(\overset{5}{u}\overset{1}{z}\overset{1}{z}$$

$$+ \overset{4}{u}\overset{2}{z})\overset{2}{z} + 3\overset{4}{u}\overset{1}{z}\overset{3}{z} + \overset{3}{u}\overset{4}{z})\overset{1}{z}$$

$$+ 4((\overset{5}{u}\overset{1}{z}\overset{1}{z} + \overset{4}{u}\overset{2}{z})\overset{1}{z} + 2\overset{4}{u}\overset{1}{z}\overset{2}{z} + \overset{3}{u}\overset{3}{z})\overset{2}{z}$$

$$+ 6\,(\overset{4}{u}\overset{1}{z}\overset{1}{z} + \overset{3}{u}\overset{2}{z})\overset{3}{z} + 4\overset{3}{u}\overset{1}{z}\overset{4}{z} + \overset{2}{u}\overset{5}{z}]\overset{1}{z}$$

Um nämlich einen beliebigen Coefficienten aus dem vorhergehenden zu bilden, erhöhe man überall den Zeiger von z in den hintersten Factoren, die sich auf z beziehen, um Eins, und setze statt der vordern Zahlen-Coefficienten, die zu einem, um Eins höhern Exponenten gehörenden Binomial-Coefficienten. Alles übrige bleibt ungeändert, und man erhält dadurch so viel Glieder des neuen Coefficienten, als der vorhergehende hat. Das neue hinzukommende Glied des einen Coefficienten aber wird aus dem schon gefundenen Gliede auf eine ähnliche Weise gebildet, jedoch so, daß man jetzt den Zeiger von u um Eins erhöht und den Zeiger von z um Eins erniedriget und rückwärts den Gliedern die Binomial-Coefficienten giebt, die zu einem noch um Eins niedrigern Exponenten gehören. Wenn man die Herleitung von $\frac{d^5}{x^5}(u)$ aus $\frac{d^4}{x^4}(u)$ und von $\frac{d^6}{x^6}(u)$ aus $\frac{d^5}{x^5}(u)$ nach dieser Andeutung aufmerksam betrachtet, so wird man bald die angezeigte Ableitungs-Regel finden.

303.

Nach dieser Regel läßt sich nun der Ausdruck des allgemeinen Gliedes $\frac{d^n}{x^n}(u)$ zusammensetzen, nämlich

$$540.\quad \frac{d^n}{x^n}(u) = \overset{1}{u}\overset{2}{z}$$

$$+ (n-1)\,\overset{2}{u}\overset{1}{z}\overset{n-1}{z}$$

$$+ \frac{n-1.\,n-2}{2}(\overset{3}{u}\overset{1}{z}\overset{1}{z} + \overset{2}{u}\overset{2}{z})\overset{n-2}{z}$$

$$+ \frac{n-1.\,n-2.\,n-3}{2.3}[(\overset{4}{u}\overset{1}{z}\overset{1}{z} + \overset{3}{u}\overset{2}{z})\overset{1}{z} + 2\overset{3}{u}\overset{2}{z}\overset{2}{z} + \overset{2}{u}\overset{3}{z}]\overset{n-3}{z}$$

$$+\frac{n-1.n-2.n-3.n-4}{2.3.4}[((\overset{5}{u}\overset{1}{z}\overset{1}{z}+\overset{4}{u}\overset{2}{z})\overset{1}{z}+2\overset{4}{u}\overset{1}{z}\overset{2}{z}+\overset{3}{u}\overset{3}{z})\overset{1}{z}$$

$$+3(\overset{4}{u}\overset{1}{z}\overset{1}{z}+\overset{3}{u}\overset{2}{z})\overset{2}{z}+3\overset{3}{u}\overset{1}{z}\overset{3}{z}+\overset{2}{u}\overset{4}{z}]\overset{n-4}{z}$$

$$+\frac{n-1\,..\,n-5}{2\,..\,5}[(((\overset{6}{u}\overset{1}{z}\overset{1}{z}+\overset{5}{u}\overset{2}{z})\overset{1}{z}+2\overset{5}{u}\overset{1}{z}\overset{2}{z}+\overset{4}{u}\overset{3}{z})\overset{1}{z}$$

$$+3(\overset{5}{u}\overset{1}{z}\overset{1}{z}+\overset{4}{u}\overset{2}{z})\overset{2}{z}+3\overset{4}{u}\overset{1}{z}\overset{3}{z}+\overset{3}{u}\overset{4}{z})\overset{1}{z}$$

$$+4((\overset{5}{u}\overset{1}{z}\overset{1}{z}+\overset{4}{u}\overset{2}{z})\overset{1}{z}+2\overset{4}{u}\overset{1}{z}\overset{2}{z}+\overset{3}{u}\overset{2}{z})\overset{2}{z}$$

$$+6(\overset{4}{u}\overset{1}{z}\overset{1}{z}+\overset{3}{u}\overset{2}{z})\overset{3}{z}$$

$$+4\overset{3}{u}\overset{1}{z}\overset{4}{z}$$

$$+\overset{2}{u}\overset{5}{z}]\overset{n-5}{z}\ \text{rc.}$$

304.

Wenn man die Coefficienten zu $\overset{n}{z}$, $\overset{n-1}{z}$. $\overset{n-2}{z}$... in $\frac{d^n}{x^n}(u)$, ohne Rücksicht auf die Zahlen-Coefficienten durch A, B, C... bezeichnet, so ist

541. $\frac{d^n}{x^n}(u)$

$$=A\overset{n}{z}+n-1\,B\overset{n-1}{z}+\frac{n-1.n-2.}{2}C\overset{n-1}{z}+\frac{n-1.n-2.n-3}{2.3}D\overset{n-3}{z}\ldots$$

Zeigt man ferner durch $\overset{1}{A}$, $\overset{1}{B}$, $\overset{1}{C}$... an, daß der Zeiger von u in A, B, C... um 1 erhöht werden soll, während z nicht verändert wird, so ist

$$A=\overset{1}{u},\ \overset{1}{A}=\overset{2}{u},\ \overset{2}{A}=\overset{3}{u},\ \overset{3}{A}=\overset{4}{u},\ \overset{4}{A}=\overset{5}{u},\ \overset{5}{A}=\overset{6}{u}\ldots$$

$$B=\overset{1}{A}\overset{1}{z},\ \overset{1}{B}=\overset{2}{A}\overset{1}{z},\ \overset{2}{B}=\overset{3}{A}\overset{1}{z},\ \overset{3}{B}=\overset{4}{A}\overset{1}{z},\ \overset{4}{B}=\overset{5}{A}\overset{1}{z}\ldots$$

$$C=\overset{1}{B}\overset{1}{z}+\overset{1}{A}\overset{2}{z},\ \overset{1}{C}=\overset{2}{B}\overset{1}{z}+\overset{2}{A}\overset{2}{z},\ \overset{2}{C}=\overset{3}{B}\overset{1}{z}+\overset{3}{A}\overset{2}{z},\ \overset{3}{C}=\overset{4}{B}\overset{1}{z}+\overset{4}{A}\overset{2}{z}\ldots$$

$$D=\overset{1}{C}\overset{1}{z}+2\overset{1}{B}\overset{2}{z}+\overset{1}{A}\overset{3}{z},\ \overset{1}{D}=\overset{2}{C}\overset{1}{z},+2\overset{2}{B}\overset{2}{z}+\overset{2}{A}\overset{3}{z},\ \overset{2}{D}=\overset{3}{C}\overset{1}{z}+2\overset{3}{B}\overset{2}{z}+\overset{3}{A}\overset{3}{z}\ldots$$

$$E=\overset{1}{D}\overset{1}{z}+3\overset{1}{C}\overset{2}{z}+3\overset{1}{B}\overset{3}{z}+\overset{1}{A}\overset{4}{z},\ \overset{1}{E}=\overset{2}{D}\overset{1}{z}+3\overset{2}{C}\overset{2}{z}+3\overset{2}{B}\overset{3}{z}+\overset{2}{A}\overset{4}{z}\ldots$$

$$F=\overset{1}{E}\overset{1}{z}+4\overset{1}{D}\overset{2}{z}+6\overset{1}{C}\overset{3}{z}+4\overset{1}{B}\overset{4}{z}+\overset{1}{A}\overset{5}{z}\ldots\ \text{rc.}$$

welche Größen nicht von u abhängen, sondern für jeden beliebigen Coefficienten dieselben sind, so daß man nur eine hinreichende Zahl derselben berechnen darf, um mit den Coefficienten so weit zu gehen als man will.

Nach diesen Formeln lassen sich die Größen $\frac{d}{x}(u)$, $\frac{d^2}{x^2}(u) \ldots \frac{d^n}{x^n}(u)$ der Reihe nach berechnen, und hat man sie gefunden, so erhält man

$$543 \left\{ \begin{array}{l} u = ou + x \frac{d}{x}(ou) \\ + \frac{x}{2} \frac{d^2}{x^2}(ou) + \frac{x^3}{2.3} \frac{d^3}{x^3}(ou) \ldots \frac{x^n}{2.3 \ldots n} \frac{d^n}{x^n}(ou) \ldots \\ \text{oder} \\ f\varphi x = f\varphi o x + x \frac{d}{x} f\varphi o x + \frac{x^2}{2} \frac{d^2}{x^2} f\varphi o x \ldots + \frac{x^n}{2.3 \ldots n} \frac{d_n}{x^n} f\varphi o x \ldots \end{array} \right.$$

welches die gesuchte Reihe für $f \varphi x$ ist.

Ich will diese allgemeine Ausdrücke auf einige Beispiele anwenden, bei denselben jedoch nur mehr den Gang der Rechnung andeuten, als dieselbe ausführen. Die Ausführung, welche mehr Zeit kostet als mir zu Gebote steht, muß ich Andern überlassen.

Beispiele.

Erstes Beispiel vom log cos x.

305.

Eine Function zweiter Ordnung, wie z. B. log cos x, kann auf dreierlei Art ausgedrückt werden, entweder unentwickelt oder halb entwickelt oder ganz entwickelt. Unentwickelt ist der Ausdruck log cos x, halb entwickelt ist der Ausdruck von log cos x, wenn man die entwickelte Reihe für cos x oder diejenige für log (cos x) setzt, nämlich

$$544. \quad \log\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2 \ldots 6} \ldots\right) \text{ oder}$$

545. $\cos x - 1 - \frac{(\cos x - 1)^2}{2} + \frac{(\cos x - 1)^3}{3} - \frac{(\cos x - 1)^4}{4} \ldots$

Diese beiden Reihen für $\log \cos x$ sind halb entwickelte Ausdrücke dieser Größe. Ganz entwickelt ist der gesuchte Ausdruck, welcher x nur in Potenzen von ganzen positiven Exponenten enthält. Ob es besser sey, von dem gegebenen unentwickelten Ausdruck unmittelbar zu dem entwickelten überzugehen, oder mittelbar, durch den halb entwickelten, hängt von der Natur des gegebenen Ausdrucks und zwar davon ab, ob eine convergirende Reihe entsteht, wenn man $x = 0$ setzt, oder eine divergirende.

306.

In dem gegenwärtigen Fall, $\log \cos x$, kann man unmittelbar aus dem unentwickelten Ausdruck den ganz entwikkelten finden. Es ist nämlich

546. $z = \cos x$ und $u = \log z$

Also ist

$$\frac{d}{x} z = -\sin x,\ \frac{d^2}{x^2} z = -\cos x,\ \frac{d^3}{x^3} z = \sin x,\ \frac{d^4}{x^4} z = \cos x \ldots$$

$$\frac{d}{z} u = \frac{1}{z} = \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{d^2}{z^2} u = -z^{-2} = -\frac{1}{\cos x^2}$$

$$\frac{d^3}{z^3} u = +2z^{-3} = \frac{2}{\cos x^3}$$

$$\frac{d^4}{z^4} u = -2.3z^{-4} = -\frac{2.3}{\cos x^4}$$

$$\frac{d^5}{z^5} u = +2.3.4z^{-5} = +\frac{2.3.4}{\cos x^5} \ldots$$

Dieses giebt, für $x = 0$,

$$\overset{1}{z} = 0,\ \overset{2}{z} = -1,\ \overset{3}{z} = 0,\ \overset{4}{z} = 1,\ \overset{5}{z} = 0,\ \overset{6}{z} = -1,\ \text{u. s. w.}$$

$$\overset{1}{u} = 1,\ \overset{2}{u} = -1,\ \overset{3}{u} = 2,\ \overset{4}{u} = -2.3,\ \overset{5}{u} = 2.3.4 \ldots$$

Setzt man solches in (542.), so erhält man

$$A = 1,\ \overset{1}{A} = -1,\ \overset{2}{A} = 2,\ \overset{3}{A} = -6,\ \overset{4}{A} = 24,\ \overset{5}{A} = -120 \ldots$$

$$B = 0,\ \overset{1}{B} = 0 \text{ ꝛc.} \ldots$$

$$C = 1,\ \overset{1}{C} = -2,\ \overset{2}{C} = 6,\ \overset{3}{C} = -24 \ldots$$

$$D = 0,\ \overset{1}{D} - 0 \text{ ꝛc.} \ldots$$

$$E = 3.2 - 1 = 5,\ \overset{1}{E} = -18 + 2 = -16$$

$$F = 0 \text{ ꝛc.}$$

$$G = +80 - 20 + 1 = 61 \text{ ꝛc.}$$

Dieses giebt zufolge (541.)

$$\frac{d}{x}(ou) = 0$$

$$\frac{d^2}{x^2}(ou) = -1$$

$$\frac{d^3}{x^3}(ou) = 0$$

$$\frac{d^4}{x^4}(ou) = 1 + \frac{3.2}{2} - 1 = -2$$

$$\frac{d^5}{x^5}(ou) = 0$$

$$\frac{d^6}{x^6}(ou) = -1 + \frac{5.4}{2}.\ 1 + \frac{5.4.3.2}{2.3.4}. - 5 - 1 = -16$$

$$\frac{d^7}{x^7}(ou) = 0$$

$$\frac{d^8}{x^8}(on) = 1 + \frac{7.6}{2}.\ 1 - 1 + \frac{7.6.5.4}{2.3.4}.5.1 + \frac{7.6.5.4.3.2}{2.3.4.5.6}.61.-1$$

$$= 1 - 21 + 175 - 427 = -272 \text{ ꝛc.}$$

also ist zufolge (543.)

$$\log\cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{2x^4}{2.3.4} - \frac{16x^6}{2.3.4.5.6} - \frac{272x^8}{2.3\ldots8} \ldots \text{ oder}$$

$$547.\quad \log\cos x = -\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^6}{5.9} + \frac{17x^8}{3.4.5.6.7} \ldots\right)$$

307.

Im Vorbeigehen werde bemerkt, daß sich der Logarithme von $\cos x$ auch noch auf mancherlei andere Arten finden läßt. Man findet ihn z. B. wenn man, wie Cagnoli (Trigonometrie §. 405. S. 85), die Reihe für $\tang x$ zurückleitet, weil $d \log \cos x = \frac{d \cos x}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tang x$ ist.

Dieses Verfahren ist an sich sehr kurz, allein man muß dazu erst die Reihe für $\tang x$ haben.

Ein anderes Verfahren ist folgendes.

308.

Es ist $d \log \cos x = -\frac{\sin x}{\cos x}$. Man setze $x + k$ statt x, so erhält man $d \log \cos (x+k) = -\frac{\sin (x+k)}{\cos (x+k)}$, oder wenn $\log \cos x = u$ ist $du + k d^2 u + \frac{k^2}{2} d^3 u \ldots$ $= -\frac{\sin (x+k)}{\cos (x+k)}$. Man setze hierin $x = 0$, so sind die Werthe der Größen du, $d^2 u$, $d^3 u \ldots$ diejenigen der Größen $\frac{d}{x} f\varphi o x$, $\frac{d^2}{x^2} \ldots$ in dem allgemeinen Ausdruck (534.) für den gegenwärtigen Fall, und es ist

$$548. \quad du + k d^2 u + \frac{k^2}{2} d^3 u \ldots = -\frac{\sin k}{\cos k}.$$

Sucht man daher aus dieser Gleichung die Werthe von du, $d^2 u$, $d^3 u$, so darf man sie nur in (543.) substituiren, um $\log \cos x$ zu finden.

Bekanntlich ist $\cos k = 1 - \frac{k^2}{2} + \frac{k^4}{2.3.4} - \frac{k^6}{2\ldots6} \ldots$ und

$$\sin k = k - \frac{k^3}{2.3} + \frac{k^5}{2\ldots5} - \frac{k^7}{2\ldots7}$$

Setzt man

549. $\frac{1}{1} = \overset{1}{a},\ \frac{1}{2} = \overset{2}{a},\ \frac{1}{2.3} = \overset{3}{a},\ \frac{1}{2.3.4} = \overset{4}{a}$ u. s. w.

so giebt die Gleichung (548.) folgendes:

$$du + \overset{1}{a}kd^2u + \overset{2}{a}\overset{2}{k}d^3u + \overset{3}{a}\overset{3}{k}d^4u \ldots = - \frac{\overset{1}{a}k - \overset{3}{a}\overset{2}{k} + \overset{5}{a}\overset{5}{k} \ldots}{1 - \overset{2}{a}\overset{2}{k} + \overset{4}{a}\overset{4}{k} \ldots}$$

Weil der Nenner rechter Hand, k nur in Potenzen von ungraden, und der Zähler, k nur in Potenzen von graden Exponenten enthält, so müssen linker Hand alle Coefficienten zu Potenzen von k mit graden Exponenten Null seyn; denn multiplicirt man mit dem Nenner, so können die Glieder des Produkts, welche Potenzen von k mit graden Exponenten enthalten, mit keinen ähnlichen Gliedern rechter Hand verglichen werden, und sind also Null. Es ist also

$$\overset{1}{d}u = 0,\ \overset{3}{d}u = 0,\ \overset{5}{d}u = 0 \text{ ꝛc.}$$

und es bleibt nur übrig

550. $$\overset{1}{a}kd^2u + \overset{3}{a}\overset{3}{k}d^4u + \overset{5}{a}\overset{5}{k}d^6u \ldots = - \frac{\overset{1}{a}k - \overset{3}{a}\overset{3}{k} + \overset{5}{a}\overset{5}{k} ..}{1 - \overset{2}{a}\overset{2}{k} + \overset{4}{a}\overset{4}{k}}$$

Multiplicirt man nun mit dem Nenner der rechten Seite, so erhält man

$$\overset{1}{a}d^2uk + \overset{3}{a}d^4u\overset{3}{k} + \overset{5}{a}d^6u\overset{5}{k} + \overset{7}{a}d^8u\overset{7}{k} + .. = \overset{1}{a}\overset{3}{k} + \overset{3}{a}\overset{3}{k} - \overset{5}{a}\overset{5}{k} + \overset{7}{a}\overset{7}{k} ..$$
$$- \overset{2}{a}\overset{1}{a}d^2u\overset{3}{k} - \overset{2}{a}\overset{3}{a}d^4u\overset{5}{k} - \overset{2}{a}\overset{5}{a}d^6u\overset{7}{k} \ldots$$
$$- \overset{4}{a}\overset{1}{a}d^2u\overset{5}{k} + \overset{4}{a}\overset{3}{a}d^4u\overset{7}{k} \ldots$$
$$- \overset{6}{a}\overset{1}{a}d^2u\overset{7}{k} \ldots$$

woraus folgt, wenn man die Coefficienten zu gleichen Potenzen von k gleich setzt,

$$\overset{1}{a}d^2u = -\overset{1}{a}$$
$$\overset{3}{a}d^4u = \overset{2}{a}\overset{1}{a}d^2u = \overset{3}{a}$$
$$\overset{5}{a}d^6u - \overset{2}{a}\overset{3}{a}d^4u + \overset{4}{a}\overset{1}{a}d^2u = -\overset{5}{a}$$
$$\overset{7}{a}d^8u - \overset{2}{a}\overset{5}{a}d^6u + \overset{4}{a}\overset{3}{a}d^4u - \overset{6}{a}\overset{1}{a}d^2u = \overset{7}{a} \text{ u. s. w.}$$

und

und daraus

$$551.\left\{\begin{array}{l} d^2u = -1 \\ d^4u = \frac{1}{\overset{3}{a}}(\overset{3}{a} - \overset{2}{a}\overset{1}{a}) \\ d^6u = \frac{1}{\overset{5}{a}}(-\overset{5}{a} + \overset{2}{a}\overset{3}{a} = \overset{2}{a}\overset{2}{a}\overset{1}{a} + \overset{4}{a}\overset{1}{a} \\ d^8u = \frac{1}{\overset{7}{a}}(\overset{7}{a} - \overset{2}{a}\overset{5}{a} + \overset{2}{a}\overset{2}{a}\overset{3}{a} - \overset{2}{a}\overset{2}{a}\overset{2}{a}\overset{1}{a} + \overset{2}{a}\overset{4}{a}\overset{1}{a} - \overset{4}{a}\overset{3}{a} + \overset{4}{a}\overset{2}{a}\overset{1}{a} - \overset{6}{a}\overset{1}{a}) \end{array}\right.$$

u. s. w. Das Gesetz der Fortschreitung dieser Reihe ist leicht zu sehen. Man berechne nun darnach d^2u, d^4u, d^6u... welches die Werthe von $\frac{d^2}{x^2} f\varphi o x$, $\frac{d^4}{x^4} f\varphi o x$... in (554.) sind. Alle übrige Coefficienten $f\varphi o x$, $\frac{d}{x} f\varphi o x$, $\frac{d^3}{x^3} f\varphi o z$ sind Null. Man substituire diese Werthe in (543.), so erhält man die verlangte Reihe für $\log \cos x$.

Noch eines andern Verfahrens werde ich weiter unten, wie des gegenwärtigen, im Vorbeigehen erwähnen.

Zweites Beispiel vom log sin x.

309.

Hier ist es besser, den halb entwickelten Ausdruck von $\log \sin x$ zum Grunde zu legen, weil man sonst eine divergirende Reihe erhält, denn da z. B. hier $\frac{d}{z} u = \frac{1}{\sin x}$, $\frac{d^2}{z^2} u = -\frac{1}{\sin x^2}$, $\frac{d^3}{z^3} u = -\frac{2}{\sin x^3}$ u. s. w., so werden für $x = 0$ alle Glieder unendlich groß. Man muß also die Reihe für $\sin x$ setzen und folglich

$$552. \quad \log\left(x - \frac{x^3}{2.2} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3...7} ...\right)$$

entwickeln. Damit hier nicht x als Factor in den Nenner komme, und wenn es $= 0$ gesetzt wird, unendlich große Glieder gebe, so verwandle man erst den Ausdruck (552.) in folgenden:

553. $\log x + \log\left(1 - \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^4}{2...5} - \frac{x^6}{2...7} \dots\right)$

Hier ist nun $z = 1 - \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4.5} - \frac{x^6}{2...7} \dots$ (540.) und log sin x = log x + log z. Es ist leicht zu sehen, daß die Ableitungen von z nach x, ungrader Ordnung, für x = 0, alle Null sind, weil sie x als allgemeinen Factor enthalten. Diejenigen hingegen grader Ordnung, sind für x = 0, wie leicht zu finden,

$$\frac{d^2}{x^2} z = -\frac{1}{3}, \frac{d^4}{x^4} z = +\frac{1}{5}, \frac{d^6}{x^6} z = -\frac{1}{7}, \frac{d^8}{x^8} z = +\frac{1}{9} \text{ ꝛc.}$$

Ferner ist $\frac{d}{z} u = \frac{1}{z}$, $\frac{d^2}{z^2} u = -\frac{1}{z^2}$, $\frac{d^3}{z^3} u = +\frac{2}{z^3}$, $\frac{d^4}{z^4} u = -\frac{2.3}{z^4}$ ꝛc. also für x = 0, weil alsdann z = 1,

$$\frac{d}{z} u = 1, \frac{d^2}{z^2} u = -1, \frac{d^3}{z^3} u = -2, \frac{d^4}{z^4} u = 2.3 \text{ ꝛc.}$$

Also ist nun hier

$$\overset{1}{z} = 0, \overset{2}{z} = -\tfrac{1}{3}, \overset{3}{z} = 0, \overset{4}{z} = \tfrac{1}{5}, \overset{5}{z} = 0, \overset{6}{z} = \tfrac{1}{7}, \overset{7}{z} = 0, \overset{8}{z} = \tfrac{1}{9} \dots$$

$$\overset{1}{u} = 1, \overset{2}{u} = -1, \overset{3}{u} = +2, \overset{4}{u} = -2.3. \overset{5}{u} = 2.3.4 \text{ ꝛc.}$$

Diese Werthe kann man nun wieder wie in (§. 106.) in (542.) setzen, so erhält man A, B, C... und wenn man deren Werthe in (541.) setzt, die Werthe von $\frac{d}{x}$ (u) $\frac{d^2}{x^2}$ (u) ꝛc. für x = 0. Setzt man darauf dieselben in (543.), so findet man den verlangten Ausdruck für log sin x. Es ist folgender

554. log sin x

$$= \log x - \left(\frac{x^2}{2.3} + \frac{x^4}{2^2 3^2 5} + \frac{x^6}{3^2.5.7.9} + \frac{x^8}{3^2.5^2.7.8} \dots\right)$$

310.

Auch hier läßt sich ein ähnliches Verfahren anbringen wie

(§. 308.) nur muß man nicht sowohl log sin x als $\log \frac{\sin x}{x}$ suchen. Es ist

$$d \log \frac{\sin x}{x} = \frac{d \frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}$$

also

$$d \log \frac{\sin (x+k)}{x+k} = \frac{\cos (x+k)}{\sin (x+k)} - \frac{1}{x+k}$$ oder, wenn $\log \frac{\sin x}{x} = u$,

$$du + kd^2u + \frac{k^2}{2} d^3u \ldots = \frac{\cos (x+k)}{\sin (x+k)} - \frac{1}{x+k},$$ und für $x=0$,

$$du + kd^2u + \frac{k^2}{2} d^3u \ldots = \frac{\cos k}{\sin k} - \frac{1}{k} = \frac{1 - \frac{k^2}{2} + \frac{k^4}{2.3.4} \ldots}{k - \frac{k^3}{2.3} + \frac{k^5}{2.3\ldots5} \ldots} - \frac{1}{k}$$

Multiplicirt man mit dem Nenner $k - \frac{k^3}{2.3} + \frac{k^5}{2\ldots5} \ldots$, so lassen sich die Werthe von du, d^2u rc. finden, die, in (543.) gesetzt, die verlangte Reihe für $\log \frac{\sin x}{x}$, oder für log sin x — log x geben, so daß log sin x gleich der gefundenen Reihe + log x ist.

Drittes Beispiel vom log log (1 + x).

311.

Hier ist es, wie in (§. 309.) besser, statt von dem gegebenen, von einem halb entwickelten Ausdruck auszugehen, in welchen die Reihe für log (1 + x) eingeführt ist, also den Ausdruck $\log (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots)$ oder vielmehr den Ausdruck

555. $\log\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots\right) + \log x$ zu entwikkeln.

Es ist für denselben $z = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} \ldots$ und $u = \log z$

Man erhält $\frac{d}{x} z = -\frac{1}{2} + \frac{2x}{3} - \frac{3x^2}{4} + \frac{4x^2}{5} - \frac{5x^4}{6} \ldots$

$$\frac{d^2}{x^2} z = +\frac{2}{3} - \frac{2.3x}{4} + \frac{3.4x^2}{5} - \frac{4.5x^3}{6} \ldots$$

$$\frac{d^3}{x^3} z = -\frac{2.3}{7} + \frac{2.3.4.x}{5} - \frac{3.4.5.x^2}{6} \ldots$$

$$\frac{d^4}{x^4} z = +\frac{2.3.4}{5} - \frac{2.3.4.5.x}{6} \text{ ꝛc.}$$

und $\frac{d}{z} u = \frac{1}{z}$, $\frac{d^2}{z^2} u = -\frac{1}{z^2}$, $\frac{d^3}{z^3} u = -\frac{2}{z^3} \ldots$ also für $x = 0$,

$$\overset{1}{z} = -\frac{1}{z}, \; \overset{2}{z} = +\frac{2}{3}, \; \overset{3}{z} = -\frac{2.3}{4}, \; \overset{4}{z} = +\frac{2.3.4}{5} \ldots$$

$$\overset{1}{u} = -1, \; \overset{2}{u} = -1, \; \overset{3}{u} = 2, \; \overset{4}{u} = -2.3 \ldots$$

womit man nun weiter, wie in (§. 306.), verfahren kann.

Man findet

556. $\log\log(1 + x)$

$$= \log x - \frac{x}{2} - \frac{5}{24}. x^2 - \frac{1}{8} x^3 + \frac{251}{2880} x^4 \ldots$$

Viertes Beispiel vom $\cos e^x$.

312.

Hier ist $z = e^x$ und $u \cos z$, also ist

$$\frac{d}{x} z = \frac{d^2}{x^2} z = \frac{d^3}{x^3} z \ldots = e^x \text{ und}$$

$$\frac{d}{z} u = -\sin z, \; \frac{d^2}{z^2} u = -\cos z, \; \frac{d^3}{z^3} u = -\sin z, \; \frac{d^4}{z^4} u = \cos z \ldots$$

also für $x = 0$, welches $z = 1$ giebt,

$$\overset{1}{z} = \overset{2}{z} = \overset{3}{z} = z \ldots = 1$$

$$\overset{1}{u} = -\tfrac{1}{2}\pi,\ \overset{2}{u} = 0,\ \overset{3}{u} = \tfrac{1}{2}\pi,\ \overset{4}{u} = 0.$$

Hiermit wie in (§. 106.) verfahren giebt

557. $\cos e^x$

$$= \left(-\tfrac{1}{2}x - \frac{x^2}{2.2} + \frac{5x^4}{2.2.3.4} + \frac{23x^5}{2.2.3.4.5} + \frac{37x^6}{2.3.4.5.6} \ldots\right)\pi$$

Fünftes Beispiel von $(1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3\ldots)^m$

313.

Hier ist $z = 1 + \alpha x + \beta x^2 \ldots$ und $u = z^m$ also

$$\frac{d}{x} z = \alpha + 2\beta x + 3\gamma x^2 + 4\delta x^3 \ldots$$

$$\frac{d^2}{x^2} x = 2\beta + 2.3\gamma x + 3.4\delta x^2 \ldots$$

$$\frac{d^3}{x^3} z = 2.3\gamma + 2.3.4\delta x \ldots \text{ꝛc.}$$

und $\frac{d}{z} u = m z^{m-1}$, $\frac{d^2}{z^2} u = m.\, m-1\, z^{m-2}$ u. s. w.

also für $x = 0$, welches $z = 1$ giebt,

$$\overset{1}{z} = \alpha,\ \overset{2}{z} = 2\beta,\ \overset{3}{z} = 2.3\gamma,\ \overset{4}{z} = 2.34\delta \ldots$$

$$\overset{1}{u} = m,\ \overset{2}{u} = m.\, m-1,\ \overset{3}{u} = m.\, m-1.\, m-2 \text{ u. s. w.}$$

Dieses giebt in (542.)

$$A = m,\ \overset{1}{A} = m.\, m-1,\ \overset{2}{A} = m.m-1.m-2,\ \overset{3}{A} = m.\, m-1.\, m-2.\, m-3 \ldots$$

$$B = m.m-1.\alpha,\ \overset{1}{B} = m.m-1.m-2.\alpha,\ \overset{2}{B} = m \ldots m-3\alpha$$

$$C = m.m-1.m-2\alpha^2 + m.\, m-1.\, 2\beta,\ \overset{1}{C} = m \ldots m-3\alpha^2 + m \ldots m-2.2\beta \ldots$$

folglich in (541.)

$$\frac{d}{x}(u) = m\alpha$$

$$\frac{d^2}{x^2}(u) = 2m\beta + m.\overline{m-1}.\alpha^2$$

$$\frac{d^3}{x^3}(u) = 2.3m\gamma + 6\alpha\beta.m.\overline{m-1}. + m.\overline{m-1}.\overline{m-2}\alpha^3$$

und in (543.)

$$558. \quad (1+\alpha x+\beta x^2\ldots)^m = 1+m\alpha x+m(2\beta+\overline{m-1}\,\alpha^2)\frac{x^2}{2}$$

$$+m(2.3\gamma+6.\overline{m-1}\,\alpha\beta+\overline{m-1}.\overline{m-2}\,\alpha^3)\frac{x^3}{2.3}\ldots$$

Die Reihe ist der Ausdruck des sogenannten polymonischen Lehrsatzes

314.

Hier ist des am Ende von (§. 308.) gedachten Verfahrens für die Entwickelung von log cos x zu erwähnen. Es ist nämlich $d \log \cos x = \frac{d \cos x}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x}$ also $d^2 \log \cos x$ $= -\frac{\cos x}{\cos x} - \frac{\sin x^2}{\cos x^2} = -(1+\tan g\, x^2) = -\sec x^2 =$ $-\frac{1}{\cos x^2}$ also $\log \cos x = -\frac{1}{d^2}\frac{1}{\cos x^2}$. Man darf daher nur durch die allgemeine Formel (552.) von der Reihe $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} \ldots$ welche cos x ausdrückt, die Potenz vom Exponenten — 2 suchen, das heißt in (552.) $m = -2$ setzen und den gefundenen Ausdruck zweimal zurückleiten, also erhält man log cos x.

315.

In allen bisherigen Fällen giebt es vielleicht Mittel, die leichter zum Ziele führen, als die obige allgemeine Formel, wie sich hier an dem Ausdrucke log cos x zeigte. Es ist damit wie immer mit allgemeinen Ausdrücken, welche die Rechnung um so weniger erleichtern, je besonderer die Fälle sind, auf welche man sie anwendet. Dafür ist aber auch gegentheils ihr

Nutzen um so größer in allgemeinen Fällen, und keine besondere Methode kann eben so viel leisten, weil sie sich, nicht wie allgemeine Methode, mit gleicher Leichtigkeit auf alle, selbst auf die verwickeltesten Fälle anwenden läßt.

Ein schon etwas allgemeinerer Fall ist die Aufgabe von Umkehrung der Reihen, nämlich

Sechstes Beispiel.

Aus $\alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 \ldots = z$, x in z zu finden.

316.

Hier ist $u = x$, denn $u = f\varphi x = fx$ ist x selbst. Da nun x in z ausgedrückt werden soll, so setze man

559. $x = az + bz^2 + cz^3 + dz^4 \ldots = u$,

wo die Coefficienten $a, b, c \ldots$ zu suchen sind.

Es ist

$$\frac{d}{x} z = \alpha + 2\beta x + 3\gamma x^2 + 4\delta x^3 \ldots$$

$$\frac{d^2}{x^2} z = 2\beta + 2.3\gamma x + 3.4\delta x^2 \ldots$$

$$\frac{d^3}{x^3} z = 2.3\gamma + 2.3.4\delta x \ldots \text{ ꝛc.}$$

und

$$\frac{d}{z} u = a + 2bz + 3cz^2 + 4dz^3 \ldots$$

$$\frac{d^2}{z^2} u = 2b + 2.3cz + 3.4.dz^2 \ldots$$

$$\frac{d^3}{z^3} u = 2.3.c + 2.3.4dz \ldots$$

also, für $x = o$, welches $z = o$ giebt

$$\overset{1}{z} = \alpha,\ \overset{2}{z} = 2\beta,\ \overset{3}{z} = 2.3\gamma,\ \overset{4}{z} = 2.3.4\delta \ldots$$

$$\overset{1}{u} = a,\ \overset{2}{u} = 2b,\ \overset{3}{u} = 2.3c,\ \overset{4}{u} = 2.3.4d \ldots$$

folglich in (542.)

$\overset{1}{A} = a,\ \overset{2}{A} = 2b,\ \overset{3}{A} = 2.3c,\ \overset{4}{A} = 2.3.4d \ldots$

$B = 2\alpha b,\ \overset{1}{B} = 2.3\alpha c,\ \overset{2}{B} = 2.3.4\alpha d \ldots$

$C = 2.3\alpha^2 c + 4\beta b,\ \overset{1}{C} = 2.2.4\alpha^2 d + 2^2.3.\beta c \ldots$

$$D = 2.34\alpha^3 d + 2^2.3\alpha\beta c + 2^3.3.\alpha\beta c + 2^2 3\gamma b$$
$$= 2.3.4.\alpha^3 d + 3^2\alpha\beta c + 2^2.3\gamma b \text{ ꝛc.}$$

und in (541.)

$$\frac{d}{x}(u) = a\alpha$$

$$\frac{d^2}{x^2}(u) = 2a\beta + 2\alpha^2 b$$

$$\frac{d^3}{x^3}(u) = 2.3a\gamma + 8\alpha\beta b + 2.3\alpha^3 c + 4\alpha\beta b = 2.3a\gamma$$
$$+ 12\alpha\beta b + 6\alpha^3 c \text{ ꝛc.}$$

Dieses in (543.) gesetzt, giebt

$$f\varphi x = x = x.a\alpha + \frac{x^2}{2}(2a\beta + 2\alpha^2 b) + \frac{x^3}{2.3}(6a\gamma + 12b\alpha\beta$$
$$+ 6c\alpha^3) \ldots$$

und daraus

$$a\alpha = 0$$
$$a\beta + \alpha^2 b = 0$$
$$a\gamma + 2b\alpha\beta + c\alpha^3 = 0 \ldots$$

woraus folgt

$$a = \frac{1}{\alpha}$$

$$b = -\frac{\alpha\beta}{\alpha^2} = -\frac{\beta}{\alpha^3}$$

$$c = -\frac{a\gamma + 2\alpha\beta b}{\alpha^3} = -\frac{\gamma}{\alpha^4} + \frac{2\beta^2}{\alpha^5} \text{ ꝛc. also}$$

560. $$x = \frac{1}{\alpha}.z - \frac{\beta}{\alpha^3}.z^2 - \left(\frac{2x\beta^2 - \gamma\alpha}{\alpha^5}\right) z^3 \ldots$$

welches die gesuchte Reihe ist.

Noch allgemeiner ist folgendes Beispiel.

Siebentes Beispiel.

Aus der gegebenen Gleichung $z = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 \ldots$ die Größe $u = Ax + Bx^2 + Cx^3 \ldots$ mit gegebenen Coefficienten $A, B, C \ldots$ in z auszudrücken.

317.

Man setze $u = az + bz^2 + cz^3 \ldots$ wo also $a, b, c \ldots$ gesucht worden. Hier ist $z = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 \ldots$ und $u = Az + Bz^2 + Cz^3 \ldots$ Die Rechnung ist ganz die nämliche, wie in der vorigen Nummer, bis zu dem Ausdruck von $f\varphi x$, der hier nicht x, sondern $Ax + Bx^2 + Cx^3 \ldots$ ist. Also ist

$$Ax + Bx^2 + Cx^3 \ldots = x.\, a\alpha + x^2 (a\beta + a^2 b) + x^3 (a\gamma + 2b\alpha\beta + ca^3) \ldots$$

woraus folgt

$$a\alpha = A$$
$$a\beta + \alpha^2 b = B$$
$$a\gamma + 2b\alpha\beta + c\alpha^3 = C \text{ etc.}$$

also $a = \frac{A}{\alpha}$

$$b = \frac{1}{\alpha^2}(B - a\beta) = \frac{B}{\alpha^2} - \frac{A\beta}{\alpha^3} = \frac{B\alpha - A\beta}{\alpha^3}$$

$$c = \frac{C}{\alpha^3} - \frac{a\gamma}{\alpha^3} - \frac{2b\beta}{\alpha^2} = \frac{C}{\alpha^3} - \frac{A\gamma}{\alpha^4} - \frac{2(B\alpha - A\beta)\beta}{\alpha^5}$$

$$= \frac{C\alpha^2 - A\alpha\gamma - 2B\alpha\beta + 2A\beta^2}{\alpha^5} \text{ etc. also}$$

$$561.\quad u = \frac{A}{\alpha}.z + \frac{B\alpha - A\beta}{\alpha^3}.z^2 + \frac{C\alpha^2 - A\alpha\gamma - 2B\alpha\beta + 2B\beta^2}{\alpha^5} z^3 \ldots$$

welches der verlangte Ausdruck ist.

Ist hier $A = 1$ und $B = 0$, $C = 0$ etc., so erhält man den einzelnen Fall der vorigen Nummer.

Noch allgemeiner ist das

Achte Beispiel.

Aus $z + \varphi x$, $u = Fx$ in z auszudrücken.

318.

Die Aufgabe kann ganz auf den vorigen Fall gebracht werden, wenn man $z = \varphi x$ und $u = Fx$ durch den Taylorschen Lehrsatz in Reihen auflöset. Daher ist keine neue Rechnung nöthig.

319.

Die allgemeine Entwickelung von $f\varphi x$ ist noch in vielen andern Fällen von Nutzen. Ich komme darauf vielleicht noch bei einer andern Gelegenheit wieder zurück.

12.

Ueber den Parallelismus krummer Linien und Flächen *).

319.

Parallele Linien und Flächen sind unstreitig recht einfache geometrische Gegenstände. Grade Parallel-Linien und parallele Ebenen kommen schon in den Elementen vor.

Dennoch sind krumme Parallel-Linien und Flächen, so viel mir bekannt, noch wenig untersucht. Zwar sind die Ableitungs-Gleichungen für die wechselseitige Abhängigkeit krummer Parallelen bekannt, auch lassen sich daraus, ohne besondere Schwierigkeit, die Gleichungen von Linien oder Flächen finden, die mit gegebenen Linien oder Flächen parallel sind; desgleichen hat man solche allgemeine Ausdrücke auf mehrere Curven bestimmter Art angewendet: die allgemeine Theorie paralleler Curven einfacher und dopelter Krümmung und paralleler Flächen aber, nämlich die Theorie der Berührung, der Krümmung, der Rectification und Quadratur, ist, so viel ich weiß, noch wenig bearbeitet.

*) Diese Abhandlung ist ursprünglich französisch geschrieben, und zwar, um außerhalb verständlicher zu sein, mit Leibnitzischen Zeichen und Vorstellungen vom unendlich Kleinen. Sie soll im ersten Stück des zwölften Bandes der Annalen der Mathematik von Gergonne abgedruckt sein. Da der Gegenstand interessant ist, so theile ich davon eine Uebertragung ins Deutsche mit, die mit dem Original im Wesentlichen bis auf einige kleine Abänderungen und Zusätze, übereinkommt, bediene mich aber der von mir vorgeschlagenen Zeichen und Vorstellungen, über welche ich mich im Deutschen schon ausführlich erklärt habe, und welche ich, aus Gründen, für die bessern halte.

Ich bin auf einige hieher gehörige, durch ihre große Allgemeinheit und Einfachheit merkwürdige Sätze gekommen, die ich kürzlich mittheilen will. Den weitern Verfolg muß ich Andern überlassen, da ich nur wenige Mußestunden mathematischen Untersuchungen widmen kann.

A. Ueber den Parallelismus der Curven einfacher Krümmung.

320.

Eine Eigenschaft grader Parallelen ist, daß sie überall gleich weit von einander entfernt sind, woraus sich folgern läßt, daß alle Perpendikel auf der einen Parallele, von allen übrigen Parallelen in gleichen Abständen geschnitten werden, während die Perpendikel auf der ersten Parallele auch zugleich auf allen übrigen Parallelen senkrecht stehen. Man kann sogar die Theorie der Parallelen umkehren und den gefolgerten Lehrsatz zur Definition machen. Alsdann wird die obige, ihm vorhergehende Definition, zum Lehrsatz.

In jedem Fall ist die Gleichheit der Länge aller Perpendikel zwischen zwei graden Linien das entscheidende Zeichen ihres Parallelismus.

Es scheint also natürlich, auch eine krumme Linie in dem Fall parallel mit einer andern krummen Linie zu nennen, wenn sie alle auf die letztern gezogenen Perpendikel, in gleichen Entfernungen von ihr schneidet.

Ist eine grade Linie mit einer andern graden Linie parallel, das heißt, schneidet die letztere alle Perpendikel auf die erstere in gleichen Entfernungen von ihr, so ist auch umgekehrt die zweite Linie parallel mit der ersten. Auf krumme Linien läßt sich aber dieser Satz nicht ohne vorherigen Beweiß ausdehnen. Es scheint sogar beim ersten Anblick, daß der Parallelismus krummer Linien, anders wie bei graden, **nicht** wechselseitig Statt finde. Die Untersuchung, wie es sich damit verhalte, ist der erste Gegenstand dieser Bemerkungen.

Nach diesem soll die **Krümmung** paralleler Curven untersucht, eine Vergleichung der **Längen** der Curven angestellt,

und die Fläche zwischen zwei parallelen Curven und ihren Normalen an den Endpunkten, ausgemittelt werden.

Zuerst ist die Gleichung einer krummen Linie nöthig, welche mit einer andern gegebenen Curve parallel läuft

321.

Die Coordinaten der gegebenen Curve sollen x und y seyn. y werde als abhängig von x betrachtet. Die Art der Abhängigkeit bestimmt die gegebene Gleichung der Curve zwischen x und y. p und q mögen die Coordinaten einer willkührlichen graden Linie seyn, deren Gleichung

562. $\beta p + \alpha q = \alpha\beta$

ist. Soll diese grade Linie durch den Punkt (x, y) der Curve gehen, so muß

563. $\beta x + \alpha y = \alpha\beta$

seyn. Soll außerdem die grade Linie die Curve in dem Punkte x, y berühren, so muß seyn

564. $dy = dq = -\frac{\beta}{\alpha}$.

Nun war $y + \frac{\beta}{\alpha}x = \beta$ (563.), also ist $y - xdy = \beta$,

und weil $\frac{\beta}{\alpha}p + q = \beta$ ist, $-pdy + q = y = xdy$, oder

565. $q - y = (p - x)\,dy$

Dieses ist die Gleichung der Tangente der gegebenen Curve im Punkte x, y.

Zieht man auf die Tangente, durch den Punkt x, y, ein Perpendikel, so ist solches die Normale der Curve im Punkte x, y. Soll nun eine grade Linie durch den bestimmten Punkt x, y gehen und zugleich auf einer andern graden Linie perpendiculär seyn, deren Gleichung $\beta p + \alpha q = \alpha\beta$ ist, so ist ihre Gleichung, wie bekannt,

566. $\beta(q - y) = \alpha(p - x)$, oder $(q - y)\frac{\beta}{\alpha} = p - x$,

also, weil hier $\frac{\beta}{\alpha} = -dy$ ist,

567. $(y - q)\,dy = p - x$.

Dieses ist die Gleichung der Normale der gegebenen Curve im Punkte x, y.

u und v mögen die mit x und y correspondirenden Coordinaten der Curve seyn, die mit der gegebenen parallel läuft, a soll die constante Länge der Normalen zwischen beiden Curven bedeuten, so ist, wie leicht zu sehen,

568. $(u-x)^2 + (v-y)^2 = a^2$.

Nun war $(y-q) = \frac{p-x}{dy}$ (567.), also ist für den Punkt u, v, welchen die Normale nnd die parallele Curve gemein haben, $y - v = \frac{u-x}{dy}$. Setzt man dies in (568.), so erhält man $(x-u)^2 \left(1 + \frac{1}{dy^2}\right) = a^2$, oder, wenn die Länge des gegebenen Curven-Bogens s heißt, weil, wie bekannt, $ds = \sqrt{(1+dy^2)}$ ist:

$$(x-u)\frac{ds}{dy} = a, \text{ woraus}$$

569. $u = x - a\frac{dy}{ds}$ folgt.

Die Gleichung (567.) giebt $p - x = (y-q)\,dy$, oder $u - x = (y-v)\,dy$. Setzt man dies in (568.), so kömmt $(v-y)^2(dy^2+1) = a^2$, oder $(v-y)\,ds = a$ und hieraus $v - y = \frac{a}{ds}$, oder $v = y + \frac{a}{ds}$.

Man erhält also

570. $u = x - a\frac{dy}{ds}$.

571. $v = y + a.\frac{1}{ds}$

welches die Ausdrücke der Coordinaten u und v der neuen Curve sind.

Eigentlich ist

$$u - x = \pm a\frac{dy}{ds} \text{ oder } \frac{u-x}{dy} = \pm\frac{a}{ds} \text{ und}$$

$$v - y = \pm a.\frac{1}{ds} \text{ oder } v - y = \pm\frac{a}{ds}$$

aber die Gleichung (567.) $(y - q)\, dy = p - x$, oder $(y - v)\, dy = u - x$, oder $\frac{u - x}{dy} = -(v - y)$ zeigt daß die Größen $\frac{u - x}{dy}$ und $v - y$ allemal entgegengesetzte Zeichen haben, so daß, wenn $\frac{u - x}{dy} = -\frac{a}{ds}$, oder $u = x - a\frac{dy}{ds}$ ist, wie (570.), allemal $v - y = +\frac{a}{ds}$ oder $v = y + \frac{a}{ds}$ seyn muß, wie (571.)

Setzt man in die obigen Ausdrücke (570. und 571.) den durch die Gleichung der gegebenen Curve bestimmten Werth von y in x, so enthalten die beiden Gleichungen nur noch u, v und x. Schafft man also x zwischen diesen beiden Gleichungen weg, so erhält man eine Gleichung zwischen u und v allein, welche die gesuchte Gleichung der mit der gegebenen Curve parallelen Linie ist.

Die Elimination ist, ohne daß die Abhängigkeit der Größe y von der Größe x bestimmt wäre, nicht ausführbar. Ist aber y in x gegeben, so hat sie weiter keine Schwierigkeit, als etwa die Auflösung algebraischer Gleichungen, die vielleicht vorkommen. Da die gegenwärtigen Untersuchungen keine einzelne Anwendungen der allgemeinen Gleichungen zur Absicht haben, so kommt solches nicht weiter in Betracht.

322.

Man suche nunmehr die Richtung der Tangente der neuen Curve in dem, mit dem Punkte x, y der gegebenen Curve, correspondirenden Punkt u, v.

Die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche die Tangenten der beiden Curven in den Punkten x, y und u, v mit der Axe der x machen, sind

572. $\frac{d}{x}y$ und $\frac{d}{u}v$.

Es kommt also darauf an $\frac{d}{u}v$ in x und y auszudrücken.

Beim ersten Anblick scheint es, daß man, um v nach u abzuleiten zu können, die Gleichung zwischen u und v haben müsse, welche durch Wegschaffung der Größen x und y zwischen den Gleichungen (570. u. 571.) gefunden wird. Die Entwickelung der Gleichung zwischen u und v ist aber nicht nöthig, wenn man erwägt, daß v von u, und v und u von x und y abhängen, oder auch von x allein, weil y von x abhängt. Man kann vielmehr v unmittelbar von x, und x als von u abhängend betrachten, so daß

$$573. \quad \frac{d}{u} v = \frac{d}{x} v. \frac{d}{u} x.$$

Nun giebt die Gleichung (571.) $\frac{d}{x} v = \frac{d}{x} y + a \frac{d}{x} \left(\frac{1}{\frac{d}{x} s}\right)$

und die Gleichung (570.) $\frac{d}{u} x = 1 + a \frac{d}{u} \left(\frac{\frac{d}{x} y}{\frac{d}{x} s}\right)$, weil

$x = u + a \frac{\frac{d}{x} y}{\frac{d}{x} s}$. Ferner ist $\frac{d}{u} \frac{\frac{d}{x} y}{\frac{d}{x} s} = \frac{d}{x} \left(\frac{\frac{d}{x} y}{\frac{d}{x} s}\right) \frac{d}{u} x$, eben wie

$\frac{d}{u} v = \frac{d}{x} v. \frac{d}{u} x$ ist. Also ist $\frac{d}{u} x = 1 + a \frac{d}{x} \left(\frac{\frac{d}{x} y}{\frac{d}{x} s}\right) \frac{d}{u} x$,

woraus folgt

$$574. \quad \frac{d}{u} x = \frac{1}{1 - a \frac{d}{x} \left(\frac{\frac{d}{x} y}{\frac{d}{x} s}\right)}$$

Setzt

Setzt man diese Ausdrücke von $\frac{d}{x}v$ und $\frac{d}{u}x$ in die Gleichung (573.), so erhält man

$$575.\quad \frac{d}{u}v = \frac{\frac{d}{x}y + a\frac{d}{x}\left(\frac{1}{\frac{d}{x}s}\right)}{1 - a\frac{d}{x}\left(\frac{\frac{d}{x}y}{\frac{d}{x}s}\right)}$$

Man setze der Kürze wegen $\frac{d}{x}s = p$ und $\frac{d}{x}y = q$, so ist

$$\frac{\frac{d}{x}y}{\frac{d}{x}s} = \frac{q}{p} \text{ und } \frac{1}{\frac{d}{x}s} = \frac{1}{p}, \text{ also}$$

$$\frac{d}{x}\frac{1}{\frac{d}{x}s} = \frac{d}{x}\left(\frac{1}{p}\right) = -\frac{\frac{d}{x}p}{p^2} \text{ und } \frac{d}{x}\left(\frac{\frac{d}{x}y}{\frac{d}{x}s}\right) =$$

$$\frac{d}{x}\left(\frac{q}{p}\right) = \frac{p\frac{d}{x}q - q\frac{d}{x}p}{p^2} \text{ folglich}$$

$$\frac{d}{u}v = \frac{q - a.\frac{\frac{d}{x}p}{p^2}}{1 - a\frac{p\frac{d}{x}q - p\frac{d}{x}p}{p^2}} \text{ oder}$$

$$575.\quad \frac{d}{u}v = \frac{p^2q - a\frac{d}{x}p}{p^2 - a(p\frac{d}{x}q - q\frac{d}{x}p)}$$

Es ist aber $\frac{d}{x}s^2 = 1 + \frac{d}{x}y^2$, oder $p^2 = 1 + q^2$, also

$$\frac{d}{x}p = \frac{q\frac{d}{x}q}{\sqrt{(1+q^2)}} \text{ und } p\frac{d}{x}q - q\frac{d}{x}p = \frac{d}{x}q\sqrt{(1+q^2)}$$

$$-\frac{q^2\frac{d}{x}q}{\sqrt{(1+q^2)}} = \frac{\frac{d}{x}q}{\sqrt{(1+q^2)}};$$ also ist in (575.)

$$\frac{d}{u}v = \frac{(1+q^2) - a\frac{q\frac{d}{x}q}{\sqrt{(1+q^2)}}}{1+q^2 - a.\frac{\frac{d}{x}q}{\sqrt{(1+q^2)}}} = q = \frac{d}{x}y,$$

mithin

576. $\frac{d}{u}v = \frac{d}{x}y.$

Daraus folgt, daß, wenn eine Curve mit einer andern parallel ist und man zieht an den beiden Curven, in den Punkten, in welchen eine beliebige Normale sie schneidet, Tangenten, daß diese Tangenten immer mit einander parallel sind.

Da nun die Normalen einer Curve senkrecht auf ihren Tangenten stehen, die Tangenten einer parallelen Curve aber, wie oben gefunden, mit den Tangenten der gegebenen Curve parallel sind, so stehen die Normalen der gegebenen Curve auch zugleich auf jeder mit ihr parallelen Curve senkrecht, und sind folglich zugleich zu der parallelen Curve, Normalen.

Mithin sind alle Curven, die, in der Richtung der Normalen einer von ihnen gemessen, überall gleich weit von einander abstehen, allemal wechselseitig parallel, so daß also dergleichen Curven eben so vollständige Parallelen sind, als gleich weit von einander abstehende grade Linien.

323.

Ich komme weiter zum Krümmungs-Halbmesser.

Die Coordinaten eines willkührlichen Kreises sollen p und q sein, die Coordinaten seines Mittelpunkts α und β, sein Halbmesser r, so ist

577. $\varepsilon^2 = (p - \alpha)^2 + (q - \beta)^2$.

Soll dieser Kreis durch den Punkt x, y der gegebenen Curve gehen, so ist für diesen Punkt $p = x$ und $q = y$, also

578. $\varepsilon^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2$.

Soll der Kreis im Punkte x, y, mit der gegebenen Curve auch einerlei Tangente haben, so muß

579. $\frac{d}{p} q = \frac{d}{x} y$ sein;

und soll der Kreis zugleich im Punkte x, y der Krümmungs-Kreis der gegebenen Curve sein, so muß noch

580. $\frac{d^2}{p^2} q = \frac{d^2}{x^2} y$ sein.

Leitet man die Gleichung (577.) nach p ab, so erhält man

581. $(q - \beta) \frac{d}{p} q + p - \alpha = 0$,

also $\frac{d}{p} q = -\frac{p-\alpha}{q-\beta}$, und weil $\frac{d}{p} q = \frac{d}{x} y$ ist (579.)

582. $\frac{d}{p} q = \frac{d}{x} y = -\frac{p-\alpha}{b-\beta}$.

Nimmt man die zweite Ableitung von der Gleichung (577.) nach p, oder die erste von der Gleichung (581.), so erhält man

573. $(q - p) \frac{d^2}{p^2} q + \frac{d}{p} q^2 + 1 = 0$,

und weil $\frac{d^2}{p^2} q = \frac{d^2}{x^2} y$ ist (580.),

584. $(q - \beta) \frac{d^2}{x^2} y + \frac{d}{x} y^2 + 1 = 0$,

oder auch, weil $\frac{d}{x} y^2 + 1 = \frac{d}{x} s^2$ ist,

$$(q - \beta) \frac{d^2}{x^2} y + \frac{d}{x} s^2 = 0,$$

woraus folgt

$$585.\quad q - \beta = - \frac{\frac{d}{x} s^2}{\frac{d^2}{x^2} y}.$$

Aus (582.) folgt $\frac{d}{x} y^2 + 1$, oder $\frac{d}{x} s^2 = \frac{(p-\alpha)^2 + (q-\beta)^2}{(q-\beta)^2}$ $= \frac{\varepsilon^2}{(q-\beta)^2}$ (577.), also $\frac{d}{x} s = \frac{\varepsilon}{q-\beta}$. Multiplicirt man diesen Ausdruck mit demjenigen (585.), so erhält man

$$586.\quad \varepsilon = - \frac{\frac{d}{x} s^3}{\frac{d^2}{x^2} y},$$

welches der Ausdruck des Krümmungs-Halbmessers der gegebenen Curve im Punkte x, y ist, und zwar, wenn, wie geschahe, x als unabhängig veränderlich betrachtet wird.

Nennt man den Krümmungs-Halbmesser der mit der gegebenen, parallelen Curve, für den Punkt u, v: ε', so ist

nothwendig, eben wie $\varepsilon = - \frac{\frac{d}{x} s^3}{\frac{d^2}{x^2} y}$, oder

$$\varepsilon = - \frac{\left(1 + \frac{d}{x} y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2}{x^2} y}$$ war, auch

$$587.\quad \varepsilon' = - \frac{\left(1 + \frac{d}{u} v^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2}{u^2} v}$$

wenn einstweilen für die parallele Curve, u zur unabhängig veränderlichen Größe genommen wird.

Nun ist $\frac{d^2}{u^2} v$ oder $\frac{d}{u}\left(\frac{d}{u} v\right) = \frac{d}{x}\left(\frac{d}{u} v\right) \frac{d}{u} x$. Für

parallele Curven aber ist $\frac{d}{u}v = \frac{d}{x}y$ (576.) und $\frac{d}{u}x$

$$= \frac{1}{1 - a\frac{d}{x}\left(\frac{\frac{d}{x}y}{\frac{d}{x}s}\right)} \quad (574.)$$

also ist $\frac{d}{u}\left(\frac{d}{u}v\right)$ oder $\frac{d^2}{u^2} = \frac{d}{x}\left(\frac{d}{x}y\right) \cdot \dfrac{1}{1 - a\frac{d}{x}\left(\frac{\frac{d}{x}y}{\frac{d}{x}s}\right)}$

folglich in (587.)

$$588. \quad \varrho' = -\frac{\left(1+\frac{d}{x}y^2\right)^{\frac{3}{2}}\left[1 - a\frac{d}{x}\left(\frac{\frac{d}{x}y}{\frac{d}{x}s}\right)\right]}{\frac{d}{x}\left(\frac{d}{x}y\right)}$$

Es sei $\frac{d}{x}s = P$ und $\frac{d}{x}y = Q$, so daß also $1 + Q^2$ $= P^2$, so ist $\frac{d}{x}\left(\frac{\frac{d}{x}y}{\frac{d}{x}s}\right) = \frac{d}{x}\left(\frac{Q}{P}\right) = \frac{P\frac{d}{x}Q - Q\frac{d}{x}P}{P^2}$, und

weil $\frac{d}{x}P = \frac{d}{x}\left(\frac{d}{x}s\right) = \frac{d}{x}\sqrt{(1+\frac{d}{x}y^2)} = \frac{d}{x}\sqrt{(1+Q^2)}$

$= \frac{Q\frac{d}{x}Q}{\sqrt{(1+Q^2)}} = \frac{Q\frac{d}{x}Q}{P}$ ist, $\frac{d}{x}\left(\frac{\frac{d}{x}y}{\frac{d}{x}s}\right) = \dfrac{P\frac{d}{x}Q - Q^2\frac{\frac{d}{x}Q}{P}}{P^2}$

$$= \frac{P^2 - Q^2}{P^2} \cdot \frac{d}{x}Q = \frac{\frac{d}{x}Q}{P^3} = \frac{\frac{d^2}{x^2}y}{\frac{d}{x}s^3}.$$

Setzt man dieses in (588.) und schreibt daselbst $\frac{d}{x} s^3$ statt $(1 + \frac{d}{x} y^2)^{\frac{3}{2}}$ und $\frac{d^2}{x^2} y$ statt $\frac{d}{x}\left(\frac{d}{x} y\right)$, so erhält man

$$\varepsilon' = - \frac{\frac{d}{x} s^3 \left(1 - a \frac{\frac{d^2}{x^2} y}{\frac{d}{x} s^3}\right)}{\frac{d^2}{x^2} y} \text{ oder}$$

$$\varepsilon' = - \frac{\frac{d}{x} s^3}{\frac{d^2}{x^2} y} + a.$$

Es war $- \frac{\frac{d}{x} s^3}{\frac{d^2}{x^2} y} = \varepsilon$, also ist

589. $\varepsilon' = \varepsilon + a.$

Nun haben die Krümmungs-Halbmesser einer Curve immer die Richtungen der Normalen in den Berührungs-Punkten, und die Normalen paralleler Curven fallen, wie oben gefunden, in einander. Also fallen auch die Krümmungs-Halbmesser paralleler Curven in einander. Jetzt aber fand sich, daß der Unterschied $\varepsilon' - \varepsilon$ der Längen der Krümmungs-Halbmesser zweier paralleler Curven, dem Abstande a, in welchem die Curven neben einander hinlaufen, gleich ist (589.). Also folgt, daß alle correspondirenden Punkte paralleler Curven einerlei Mittelpunkt der Krümmung haben. Da nun der geometrische Ort der Mittelpunkte der Krümmung einer Curve ihre Evolute ist, so folgt, daß parallele Curven allemal eine und dieselbe Evolute haben.

Man nennt auch zuweilen parallele Curven solche, die von willkührlichen aber festen Punkten eines gespannten Fadens beschrieben werden, welchen man von einer andern Curve ab-

wickelt, die alsdann die gemeinschaftliche Evolute der entstehenden Curven ist.

Wäre man von dieser Definition ausgegangen, so hätte man alles Bisherige, umgekehrt sehr leicht finden können. Denn da der Krümmungs-Halbmesser einer Curve allemal auf der Curve senkrecht steht, so folgt von selbst, daß die Tangenten paralleler Curven, an correspondirenden Punkten, mit einander parallel sein müssen, und da die wechselseitige Entfernung der fixen Punkte des gespannten Fadens, von welchen die parallelen Curven beschrieben werden, unveränderlich dieselbe bleibt, auch diese Punkte in einer graden Linie liegen, die allemal die Richtung der Normalen der Curve hat; so folgt auch, daß die parallelen Curven überall gleich weit von einander abstehen, daß sie gemeinschaftliche Normalen haben, und daß ihr Abstand von einander der unveränderlichen Entfernung der beschriebenen Punkte von einander gleich ist.

Es war indessen nicht uninteressant, zu sehen, wie die Rechnung diese Resultate giebt, wenn man bloß von einer Definition durch Equidistanz ausgeht, welche Erklärung, weil man dabei nicht die Idee der Abwickelung nöthig hat, einfacher und auch der Erklärung gerader Parallelen ähnlicher, ja derselben sogar gleich ist.

324.

Wir wollen ferner die Längen der Bogen zweier parallelen Curven zwischen zwei Normalen vergleichen.

Man bezeichne die Bogen zweier parallelen Curven zwischen den nämlichen Normalen mit s und σ, so ist, wie bekannt:

$$590. \begin{cases} \frac{d}{x} s = \sqrt{(1 + \frac{d}{x} y^2)} \\ \frac{d}{u} \sigma = \sqrt{(1 + \frac{d}{u} v^2)} \end{cases}$$

Da nun bei parallelen Curven $\frac{d}{x} y = \frac{d}{u} v$ ist (576.), so ist

$$591. \quad \frac{d}{x} s = \frac{d}{u} \sigma.$$

Es ist $\frac{d}{u}\sigma = \frac{d}{x}\sigma\,\frac{d}{u}x$, also auch $\frac{d}{x}s = \frac{d}{x}\sigma.\,\frac{d}{u}x$ und

$$592.\quad \frac{d}{x}\sigma = \frac{\frac{d}{x}s}{\frac{d}{u}x}.$$

Aber $\frac{1}{\frac{d}{x}x} = x - a\,\frac{d}{x}\left(\frac{\frac{d}{x}y}{\frac{d}{x}s}\right)$ (574.), also

$$593.\quad \frac{d}{x}\sigma = \frac{d}{x}s\left[1 - a\,\frac{d}{x}\left(\frac{\frac{d}{x}y}{\frac{d}{x}s}\right)\right].$$

Wie im vorigen Paragraph gefunden wurde, ist $\frac{d}{x}\left(\frac{\frac{d}{x}y}{\frac{d}{x}s}\right)$ $= \frac{\frac{d^2}{x^2}y}{\frac{d}{x}s^3}$; also ist

$$594.\quad \frac{d}{x}\sigma = \frac{d}{x}s - a\,\frac{\frac{d^2}{x^2}y}{\frac{d}{x}s^2} = \frac{d}{x}s - a.\,\frac{\frac{d}{x}\left(\frac{d}{x}y\right)}{1 + \frac{d}{x}y^2}$$

Die Stammgleichung von dieser Gleichung nach x genommen, ist, wie leicht zu sehen,

$$595.\quad \sigma = s - a.\ \mathrm{arc.\ tang}\left(\frac{d}{x}y\right) + \mathrm{Const.}$$

Die Größe $\frac{d}{x}y$ drückt die trigonometrische Tangente des Winkels aus, welchen die Tangente der gegebenen Curve mit der Axe der x macht. Bezeichnet man das Maaß dieses Win=

kels, das heißt den Kreisbogen zwischen seinen Schenkeln, für den Halbmesser 1, durch φ, so ist

596. $\sigma = s - a\varphi + \text{Const.}$

Der Werth von φ am Anfangs-Punkt des Bogens der gegebenen Curve sei α, so ist

$$0 = 0 - a\alpha + \text{Const.}$$

weil σ und s beide für die Anfangs-Punkte der Bogen der beiden Curven 0 sind. Also ist

$$\text{Const.} = a\alpha \text{ und}$$

$$\sigma = s - a\varphi + a\alpha.$$

Der Werth von φ für den Endpunkt des Bogens der gegebenen Curve sei β, so ist für den ganzen Bogen

597. $\sigma = s + a(\alpha - \beta).$

Dieses ist der Ausdruck der Länge σ des Bogens einer Curve, die mit einer andern gegebenen Curve parallel läuft, wenn der correspondirende Bogen dieser letztern s, und die Entfernung der beiden Curven von einander, a heißt.

Die Größe $\alpha - \beta$ in diesem Ausdruck bedeutet den Unterschied der Winkel, welchen die Tangenten an den Endpunkten der Curven-Bogen mit der Axe der x machen. Es ist leicht zu sehen, daß der Unterschied dieser Winkel, dem Unterschiede derjenigen Winkel gleich ist, welchen die Normalen der Curven, an den Endpunkten, mit den Axen der x machen, weil alle Normalen mit den zugehörigen Tangenten gleiche, nämlich rechte Winkel einschließen. Nun ist auch der Unterschied der Winkel, welche die Normalen mit der Axe der x machen, dem Winkel gleich, welchen sie mit einander machen. Also drückt $a(\alpha - \beta)$ die Länge eines Kreisbogens aus, der den Abstand der parallelen Curven zum Halbmesser, und den Winkel zwischen den Normalen an den Endpunkten, zum Maaß hat.

Es folgt also, weil $\sigma - s = a(\alpha - \beta)$, daß der Unterschied der Längen der Bogen beliebiger parallelen Curven zwischen einerlei Normalen, einem Kreisbogen gleich ist, der

den Abstand der Curven von einander zum Halbmesser, und den Winkel zwischen den Normalen, zum Maaß hat.

Ist die gegebene Curve in sich zurücklaufend oder geschlossen, auf die Weise, wie z. B. eine Ellipse, so findet das Nämliche auch mit allen ihr parallelen Curven, Statt. Der Winkel zwischen den Normalen an den Endpunkten, ist in diesem Fall vier rechten gleich. Also ist der Unterschied der Längen geschlossener paralleler Curven, dem Umfange eines Kreises gleich, dessen Halbmesser dem Abstande der Curven gleich ist.

Wäre die gegebene Curve ein Kreis, so wären alle, mit ihm parallele Curven, ebenfalls Kreise, und zwar concentrische. Der Unterschied der Länge zweier concentrischen Kreis-Umfänge wäre also, nach dem obigen, für alle Curven geltenden Lehrsatze, dem Umfange eines Kreises gleich, welcher den Abstand der concentrischen Kreise zum Halbmesser hat, also gleich $2\pi a$; und so verhält es sich wirklich, wie aus den Elementen der Geometrie bekannt ist. Denn es sei r der Halbmesser des innern Kreises, so ist der Halbmesser des äußern Kreises $r + a$, und die Umfänge der beiden Kreise sind $2\pi r$ und $2\pi (r + a)$; also ist der Unterschied der Umfänge $2\pi a$, wie oben.

Stellt man sich die Entstehung einer, mit einer gegebenen, parallelen Curve, durch die Bewegung der Normale vor, so ändert die Normale in jedem Augenblick ihre Richtung, und es ist merkwürdig, daß nach dem obigen allgemeinen Lehrsatze, die Summe der, gleichsam von ihr beschriebenen Kreisbogen, immer dem Unterschiede der Längen der beiden parallelen Curven gleich ist; denn die Summe jener Bogen ist einem Kreisbogen gleich, welcher den, zwischen den parallelen Curven liegenden Theil der Normale zum Halbmesser, und die ganze Aenderung der Richtung der Normale, das heißt, den Winkel zwischen den beiden Normalen an den Endpunkten, zum Maaß hat.

Aus dem allgemeinen Lehrsatz folgt auch noch, daß, wenn man, *mitten* zwischen zwei parallelen Curven, eine dritte, mit ihnen parallele Curve zieht, die Länge der letzten, welche

centrische Parallele heißen soll, weil sie alle Normalen halbirt, gleich ist dem arithmetischen Mittel der Längen der gegebenen parallelen Curven; denn da die Abstände der centrischen Curve von den beiden gegebenen gleich groß sind, und der Unterschied der Längen paralleler Curven nur von diesem Abstande abhängt, so ist dieser Unterschied für beide gegebene Curven gleich groß; also liegt die Länge der centrischen Curve mitten inne zwischen den Längen der beiden gegebenen parallelen Curven.

325.

Es folge ferner die Berechnung der Fläche zwischen zwei parallelen Curven und den beiden Normalen an den Endpunkten.

Das nächste Mittel, diese Fläche zu finden, scheint zu sein, daß man die Fläche unter den Coordinaten der, mit der gegebenen, parallelen Curve sucht, und davon die Fläche unter den Coordinaten der gegebenen Curve und die Dreiecke unter den Normalen an den Endpunkten abzieht. Die Auflösung der Aufgabe auf diese Weise bietet ein interessantes Rechnungs-Beispiel dar. Allein um den Raum zu ersparen, überlasse ich sie dem Leser, und suche die verlangte Fläche auf folgende leichtere und einfachere Art.

Wenn, wie oben, der Halbmesser der Krümmung der gegebenen Curve im Punkte x, y: ε heißt, so ist leicht zu zeigen, daß die erste Ableitung der Fläche zwischen der Curve und ihrer Evolute $\frac{1}{2}\varepsilon \frac{d}{x} s$ ist *). Eben so ist die erste Ableitung der Fläche zwischen einer, mit der gegebenen parallelen, um a von ihr abstehenden Curve, und der zugehörigen Evolute, die mit der Evolute der gegebenen Curve eins und dasselbe ist, $\frac{1}{2}(\varepsilon + a) \frac{\varepsilon + a}{\varepsilon} \cdot \frac{d}{x} s = \frac{1}{2} \frac{(\varepsilon + a)^2}{\varepsilon} \frac{d}{x} s$. Eins vom andern abgezogen giebt die erste Ableitung der Fläche

*) Ich behalte mir die Beweise dieser und ähnlicher Sätze, die für die strenge Begründung der Anwendung der Rechnung mit veränderlichen Größen wichtig sind, für ein andermal vor.

zwischen den beiden parallelen Curven, die F heißen soll. Dieselbe ist also $\frac{d}{x}F = \frac{1}{2}\frac{(\varepsilon + a)^2}{\varepsilon}\frac{d}{x}s - \frac{1}{2}\varepsilon\frac{d}{x}s = \frac{1}{2}\frac{d}{x}s\,(\varepsilon + 2a + \frac{a^2}{\varepsilon} - \varepsilon) = \frac{1}{2}\frac{d}{x}s\,(2a + \frac{a^2}{\varepsilon})$. Also ist

$$598.\quad \frac{d}{x}F = a\frac{d}{x}s + \frac{a^2}{2\varepsilon}\cdot\frac{d}{x}s.$$

Da $\varepsilon = -\dfrac{\frac{d}{x}s^3}{\frac{d^2}{x^2}y}$ (586.), so ist

$$\frac{d}{x}F = a\frac{d}{x}s - \frac{a^2\frac{d^2}{x^2}y}{2\frac{d}{x}s^2}.$$

Aber $\frac{d}{x}s^2 = 1 + \frac{d}{x}y^2$, also

$$599.\quad \frac{d}{x}F = a\frac{d}{x}s - \frac{1}{2}a^2\,\frac{\frac{d^2}{x^2}y}{1 + \frac{d}{x}y^2}$$

Die Stammgleichung zu dieser abgeleiteten ist

$$F = as - \tfrac{1}{2}a^2 \text{ arc tang } \frac{d}{x}y + \text{Const. oder}$$

$$F = as - \tfrac{1}{2}a^2\varphi + \text{Const.},$$

wenn, wie oben $\frac{d}{x}y = \varphi$ gesetzt wird.

Sind die Werthe von φ, an den Endpunkten des Curvenbogens, α und β, so findet man, wie in der vorigen Nummer,

$$600.\quad F = as + \tfrac{1}{2}a^2(\alpha - \beta).$$

Der Ausdruck $a(\alpha - \beta)$ bezeichnet einen Kreisbogen, welcher den Abstand a, der parallelen Curven, zum Halbmesser, und den Winkel $\alpha - \beta$ zwischen den Normalen an den

Endpunkten zum Maaß hat. Also bedeutet $\frac{1}{2}a^2(\alpha - \beta)$ den Inhalt des zu diesem Kreisbogen gehörigen Kreisausschnitts. Mithin folgt aus der Gleichung (600.), daß die Fläche zwischen den Bogen zweier beliebigen parallelen Curven und den Normalen an den Endpunkten der Bogen, gleich ist der Summe der Flächen eines Parallelogramms, welches den innern Curvenbogen zur Grundlinie, und den Abstand der parallelen Curve zur Höhe hat, zusammen mit einem Kreisausschnitt, welcher die Entfernung der Curven zum Halbmesser, und den Winkel zwischen den Normalen an den Endpunkten, zum Maaß hat.

Laufen die Curven in sich selbst zurück, so geht der Kreisausschnitt in einen ganzen Kreis über, dessen Halbmesser dem Abstande der Curven gleich ist; also muß man, um die Fläche des Ringes zwischen zwei parallelen Curven zu finden, die Fläche jenes Kreises zu einem Parallelogramm hinzu thun, welches die Länge der innern Curve zur Grundlinie, und den Abstand der beiden Curven zur Höhe hat.

Da die Länge der centrischen Curve die Länge der innern Curve um die Hälfte eines Kreisbogens übertrifft, der den Abstand der äußern von der innern Curve zum Halbmesser und den Winkel zwischen den Normalen an den Endpunkten zum Maaß hat, so sieht man leicht, daß die Fläche zwischen correspondirenden parallelen Curvenbogen und den Normalen an den Enden, der Fläche eines Parallelogramms gleich ist, welches die Länge des centrischen Curvenbogens zwischen den Normalen an den Endpunkten zur Grundlinie, und den Abstand der beiden parallelen Curven zur Höhe hat.

Wenn man das Unendlichkleine zu Hülfe nimmt, so kann man auf den eben ausgesprochenen Satz auch ohne alle Rechnung kommen.

Man stelle sich nämlich den Raum, je zwischen zwei unendlich nahen Normalen und den kleinen Bogen der parallelen Curven welche zwischen den Normalen liegen, als einen Ausschnitt eines Kreisringes vor, so ist der Raum zwischen zwei parallelen Curvenbogen und den Normalen an den Endpunkten, wenn man ihn in lauter solche Ausschnitte theilt,

der Summe derselben gleich. Der Inhalt eines jeden Ausschnittes ist aber dem Inhalt eines Parallelogrammes gleich, welches den, zwischen die Normalen fallenden, unendlich kleinen Theil der centrischen Parallele zur Grundlinie, und den Abstand der äußern parallelen Curve von der innern zur Höhe hat. Da diese Höhe für alle Ausschnitte die nämliche ist, so folgt unmittelbar, ohne Rechnung, daß der Raum zwischen den beiden parallelen Curvenbogen und den Normalen an den Enden, gleich ist dem Inhalt eines Parallelogramms, welches die Länge des centrischen Bogens zwischen den Normalen zur Grundlinie, und den Abstand der äußern von der innern parallelen Curve zur Höhe hat.

Dergleichen Dinge sind es, die den Gebrauch des Unendlich-Kleinen so sehr annehmlich machen, denn man erleichtert sich dadurch freilich die Mühe ganz ungemein. Allein man findet durch ein solches Verfahren eigentlich nicht die Sätze, sondern man vermuthet sie bloß: denn die Vordersätze sind willkührlich und gewöhnlich falsch, und es ist zuweilen bloßer Zufall, wenn man daraus richtige Resultate findet. In dem obigen Falle ist das sogenannte Element keinesweges ein Ausschnitt eines Kreisringes, sondern ein Ausschnitt des Ringes zwischen zwei beliebigen unbestimmten parallelen Curven. Der Vordersatz ist also eine willkührliche Hypothese, und es hat ganz andere Gründe, die bei dem weitern Schlusse übergangen werden, daß aus der unrichtigen Hypothese ein richtiger Satz folgt. Ein solches Spiel mit Hypothesen, wie der Gebrauch des Unendlich-Kleinen ist, kann nicht Mathematik genannt werden. Es verdient, den strengen Methoden der Alten gegenüber, diesen Namen nicht, und der Vortheil einiger Bequemlichkeit wiegt seinen Mangel nicht auf, denn man ist damit in Gefahr zu irren, wie berühmte Beispiele zeigen.

Nachdem die Berührung, die Krümmung, die Länge paralleler Curven, und die Fläche, welche sie einschließen, untersucht worden, wollen wir zu parallelen Flächen im Raume übergehen.

B. Vom Parallelismus krummer Flächen.

326.

Man nennt eine Fläche, parallel mit einer Ebene, wenn sie alle Perpendikel auf die Ebene in gleichen Entfernungen von der Ebene schneidet. Eine solche Fläche ist selbst wieder eine Ebene, und alle Perpendikel auf der ersten Ebene sind auch auf der neuen Ebene senkrecht. Dieses lehrt auch die Elementar-Geometrie.

Auf ähnliche Weise kann man eine krumme Fläche parallel mit einer andern nennen, wenn sie alle Perpendikel auf die letztere in gleichen Entfernungen von ihr schneidet.

Es kommt zunächst auf die Gleichung einer solchen parallelen Fläche an, wenn man die Gleichung der gegebenen Fläche hat.

327.

I. x, y und z mögen die rechtwinkligen Coordinaten der gegebenen Fläche, und ihre Gleichung mag

601. $z = f x, y$

sein, wo z als abhängig von x und y, x und y aber als unabhängig veränderlich betrachtet werden.

p, q, r mögen die rechtwinkligen Coordinaten einer beliebigen Ebene sein, deren Gleichung

602. $\frac{p}{a} + \frac{q}{b} + \frac{r}{c} = 1$

ist, in welcher Gleichung a, b, c unbestimmte Constanten bedeuten, und r als abhängig von p und q betrachtet wird.

Soll die beliebige Ebene die Fläche $z = f x, y$ in Punkte x, y, z berühren, so muß

603. $\frac{d}{p} r = \frac{d}{x} z$ und $\frac{d}{q} r = \frac{d}{y} z$

sein, wie aus der Geometrie bekannt ist.

Die Gleichung der Ebene (602.) giebt, wenn man sie nach p und q ableitet,

604. $\frac{1}{a} + \frac{\frac{d}{p}r}{c} = 0$ und $\frac{1}{b} + \frac{\frac{d}{q}r}{c} = 0.$

Substituirt man hierin die Werthe von $\frac{d}{p}r$ und $\frac{d}{q}r$ aus (603), so erhält man $\frac{1}{a} + \frac{\frac{d}{x}z}{c} = 0$ und $\frac{1}{b} + \frac{\frac{d}{y}z}{c} = 0$, oder

605. $a = -\frac{c}{\frac{d}{x}z}$ und $b = -\frac{c}{\frac{d}{y}z}.$

Setzt man darauf diese Ausdrücke von a und b in die Gleichung der Ebene (602.), so findet man $-\frac{p}{c} \cdot \frac{d}{x}z - \frac{q}{c} \cdot \frac{d}{y}z + \frac{r}{c} = 1$, oder

606. $c = r - q\frac{d}{y}z - p\frac{d}{x}z.$

Diese Gleichung giebt für den Berührungspunkt, weil für denselben $p = x$, $q = y$, $r = z$ ist,

607. $c = z - y\frac{d}{y}z - x\frac{d}{x}z.$

Zieht man die Gleichung (607.) von der Gleichung (606.) ab, so erhält man

608. $r - z - (q - y)\frac{d}{y}z - (p - x)\frac{d}{x}z = 0;$

welches die Gleichung der Ebene ist, die die gegebene Fläche in dem Punkte x, y, z berührt.

II. Die Normale einer Fläche ist das Perpendikel auf die berührende Ebene durch den Berührungspunkt.

Die rechtwinkligen Coordinaten einer graden Linie, die auf einer Ebene, deren Gleichung $\frac{p}{a} + \frac{q}{b} + \frac{r}{c} = 1$ ist, senkrecht steht, und die durch den Punkt x, y, z in dieser Ebene geht, mögen u, v und w sein, so sind die Gleichungen jener graden Linie, nach geometrischen Lehrsätzen,

609.

$$609. \begin{cases} b(v-y) - a(u-x) = 0 \\ c(w-z) - b(v-y) = 0 \\ a(u-x) - c(w-z) = 0. \end{cases}$$

Hier ist für die Ebene, welche die gegebene Fläche im Punkt x, y, z berührt, $a = -\frac{c}{\frac{d}{x}z}$, $b = -\frac{c}{\frac{d}{y}z}$ (605.) Substituirt man diese Werthe von a und b in die Gleichungen (609.), so erhält man für die Normale der gegebenen Ebene am Punkte x, y, z, die Gleichungen

$$-\frac{c}{\frac{d}{y}z}(v-y) + \frac{c}{\frac{d}{x}z}(u-x) = 0$$

$$c(w-z) + \frac{c}{\frac{d}{y}z}(v-y) = 0$$

$$-\frac{c}{\frac{d}{x}z}(u-x) - c(w-z) = 0,$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$610. \quad \frac{d}{x}z = m, \quad \frac{d}{y}z = n$$

setzt, $-\frac{c}{n}(v-y) + \frac{c}{m}(u-x) = 0,$

$$c(w-z) + \frac{c}{n}(v-y) = 0,$$

$$-\frac{c}{m}(u-x) - c(w-z) = 0$$

oder

$$611. \begin{cases} n(u-x) = m(v-y), \\ n(w-z) = -(v-y), \\ (u-x) = -m(w-z). \end{cases}$$

Zwei dieser Gleichungen der Normale an der gegebenen Ebene enthalten allemal einschließlich die dritte.

III. Die constante Länge der Normalen, von der gegebenen Fläche bis zu der Fläche die mit ihr parallel sein soll, heiße a, so ist, wie leicht zu sehen,

612. $a^2 = (u - x)^2 + (v - y)^2 + (w - z)^2$,

wenn u, v, w der Durchschnitts-Punkt der Normale mit der parallelen Ebene ist.

Substituirt man in diese Gleichung $v - y = \frac{u}{m}(u - x)$ und $w - z = -\frac{u - x}{m}$, oder $u - x = \frac{m}{n}(v - y)$ und $w - z = -\frac{v - y}{n}$ oder $v - y = -n(w - z)$ und $u - x = -m(w - z)$ aus (611.), so erhält man

$$613. \begin{cases} a^2 = (u - x)^2 \left(1 + \frac{n^2}{m^2} + \frac{1}{m^2}\right) = \frac{(u-x)^2}{m^2}(1 + m^2 + n^2), \\ a^2 = (v - y)^2 \left(\frac{m^2}{n^2} + 1 + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{(v-y)^2}{n^2}(1 + m^2 + n^2), \\ a^2 = (w - z)^2 \, (1 + m^2 + n^2). \end{cases}$$

Man bezeichne den Inhalt der gegebenen Fläche durch S, so ist, wie bekannt,

614. $\frac{d^2}{xy} S = \sqrt{(1 + \frac{d}{x} z^2 + \frac{d}{y} z^2)} = \sqrt{(1 + m^2 + n^2)}$ (610.)

Setzt man also der Kürze wegen

615. $\frac{d^2}{xy} S = s$,

so ist

616. $s = \sqrt{(1 + m^2 + n^2)} = \sqrt{(1 + \frac{d}{x} z^2 + \frac{d}{y} z^2)}$,

und in (613.)

617. $a^2 = \frac{(u-x)^2}{m^2} . s^2 = \frac{(v-y)^2}{n^2} . s^2 = (w - z)^2 . s^2$.

Die Zeichen von $u - x$ und $v - y$ sind die nämlichen, aber $w - z$ hat das entgegengesetzte Zeichen, wie aus den Gleichungen (611.) zu sehen. Also erhält man, wenn man aus den Gleichungen (617.) die Wurzeln zieht,

$$a = -\frac{s(u-x)}{m} = -\frac{s(v-y)}{n} = s(w-z),$$

und hieraus $-(u-x) = \frac{ma}{s}$, $-(v-y) = \frac{na}{s}$, $w-z = \frac{a}{s}$,

oder

618. $u = x - \frac{ma}{s}$, $v = y - \frac{na}{s}$, $w = z + \frac{a}{s}$.

Nun sind u, v, w, die Coordinaten derjenigen Punkte der Normalen, die von der gegebenen Fläche gleich weit abstehen. Sie sind also nichts anderes, als die Coordinaten der, mit der gegebenen, parallel laufenden Fläche selbst. Eliminirt man folglich zwischen den drei Gleichungen (618.), und der Gleichung der gegebenen Fläche $z = f\,x, y$, die drei Größen x, y und z, so findet man eine Gleichung zwischen u, v und w, welche die verlangte Gleichung der mit der gegebenen, parallelen Fläche ist.

328.

Nachdem die Mittel angegeben worden, in jedem bestimmten Falle die Gleichung der mit einer gegebenen, parallelen Fläche zu finden, folge die Untersuchung der Eigenschaften paralleler Flächen.

Die erste Frage ist: ob etwa auch Flächen, wie Curven, allemal *wechselseitig* parallel sind?

Oben wurde gefunden, daß, wenn eine Curve in der Ebene alle Normalen einer gegebenen Curve in gleichen Entfernungen von ihr schneidet, daß dann die beiden Curven *wechselseitig* parallel sind. Es läßt sich vermuthen, daß auch die Flächen eine ähnliche Eigenschaft haben. Wir wollen untersuchen, ob es sich so verhält.

I. Die Gleichung der, die gegebene Fläche im Punkte x, y, z berührenden Ebene war

$$r - z - (q - y)\frac{d}{y}z - (p - x)\frac{d}{x}z = 0 \ (608.)$$

Bezeichnet man also die Coordinaten einer andern Ebene, welche die parallele Fläche im Durchschnitts-Punkt u, v, w

der Normale an x, y, z und der parallelen Fläche, berührt, durch p′, q′, r′, so ist die Gleichung dieser anderen Ebene, auf gleiche Weise,

$$619.\quad r' - w - (q' - v)\frac{d}{v}w - (p' - u)\frac{d}{u}w = 0.$$

Die Wechselseitigkeit des Parallelismus der beiden Flächen würde nun Statt finden, wenn die beiden berührenden Ebenen parallel wären. Soll aber das letzte der Fall sein, so muß man, wie aus der Geometrie bekannt,

$$620.\quad \frac{d}{y}z = \frac{d}{v}w \text{ und } \frac{d}{x}z = \frac{d}{n}w$$

haben. Es kommt also darauf an, ob diese Gleichungen (620.) wirklich Statt finden.

II. Mittelst der Gleichungen (618.) kann man die Größen u, v und w durch x, y, und z ausdrücken, und mit Hülfe der Gleichung der gegebenen Fläche $z = fx, y; z,$ in x und y. Also kann man, u, v und w als von x und y abhängig, und umgekehrt x und y als von u und v abhängig betrachten, weil w von u und v abhängt. Folglich ist allgemein

$$621.\quad \frac{d}{u}w = \frac{d}{u}w\frac{d}{u}x + \frac{d}{y}w\frac{d}{u}y.$$

$$622.\quad \frac{d}{v}w = \frac{d}{x}w\frac{d}{v}x + \frac{d}{y}w\frac{d}{v}y,$$

hier kommt es nun darauf an, $\frac{d}{u}w$ und $\frac{d}{v}w$ durch x, y und z allein auszudrücken, um zu sehen, ob diese Größen den Größen $\frac{d}{x}z$ und $\frac{d}{y}z$ gleich sind, oder nicht.

III. Die Gleichung $w = z + \frac{a}{s}$ (618.) giebt

$$623.\quad \frac{d}{x}w = \frac{d}{x}z + \frac{d}{x}\left(\frac{a}{s}\right).$$

Die Gleichung $u = x - \frac{ma}{s}$ (618.) giebt $x = u + \frac{ms}{s}$ und

$$624.\quad \frac{d}{u}x = 1 + \frac{d}{u}\left(\frac{ma}{s}\right) = 1 + \frac{d}{x}\left(\frac{ma}{s}\right)\frac{d}{u}x + \frac{d}{y}\left(\frac{ma}{s}\right)\frac{d}{u}y.$$

Die Gleichung $w = z + \frac{a}{s}$ (618.) giebt ferner

$$625.\quad \frac{d}{y}w = \frac{d}{y}z + \frac{d}{y}\left(\frac{a}{s}\right).$$

Die Gleichung $v = y - \frac{na}{s}$ (618.) giebt $y = v + \frac{na}{s}$ und

$$626.\quad \frac{d}{u}y = 0 + \frac{d}{u}\left(\frac{na}{s}\right) = \frac{d}{x}\left(\frac{na}{s}\right)\frac{d}{u}x + \frac{d}{y}\left(\frac{na}{s}\right)\frac{d}{u}y.$$

Aus der Gleichung (626.) folgt

$$627.\quad \frac{d}{u}y\left[1 - \frac{d}{y}\left(\frac{na}{s}\right)\right] = \frac{d}{x}\left(\frac{na}{s}\right)\frac{d}{u}x.$$

Aus der Gleichung (624.) folgt

$$628.\quad \frac{d}{u}x\left[1 - \frac{d}{x}\left(\frac{ma}{s}\right)\right] = 1 + \frac{d}{y}\left(\frac{ma}{s}\right)\frac{d}{u}y.$$

Dividirt man die Gleichung (627.) durch die Gleichung (628.), so erhält man

$$\frac{\frac{d}{x}\left(\frac{na}{s}\right)}{1 - \frac{d}{x}\left(\frac{ma}{s}\right)} = \frac{\frac{d}{u}y\left[1 - \frac{d}{y}\left(\frac{na}{s}\right)\right]}{1 + \frac{d}{y}\left(\frac{ma}{s}\right)\frac{d}{u}y}$$

woraus folgt

$$\frac{d}{x}\left(\frac{na}{s}\right)\left[1 + \frac{d}{y}\left(\frac{ma}{s}\right)\frac{d}{u}y\right] = \left[1 - \frac{d}{x}\left(\frac{ma}{s}\right)\right]\left[1 - \frac{d}{y}\left(\frac{na}{s}\right)\right]\frac{d}{u}y$$

und

$$629.\quad \frac{d}{u}y$$

$$= \frac{\frac{d}{x}\left(\frac{na}{s}\right)}{1 - \frac{d}{x}\left(\frac{ma}{s}\right) - \frac{d}{y}\left(\frac{na}{s}\right) + \frac{d}{x}\left(\frac{ma}{s}\right)\frac{d}{y}\left(\frac{na}{s}\right) = \frac{d}{y}\left(\frac{ma}{s}\right)\frac{d}{x}\left(\frac{na}{s}\right)}$$

Substituirt man diesen Werth von $\frac{d}{u}y$ in die Gleichung (627.), so erhält man

$$630.\quad \frac{d}{u}x$$

$$= \frac{1 - \frac{d}{y}\left(\frac{na}{s}\right)}{1 - \frac{d}{x}\left(\frac{ma}{s}\right) - \frac{d}{x}\left(\frac{na}{s}\right) + \frac{d}{x}\left(\frac{ma}{s}\right)\frac{d}{y}\left(\frac{na}{s}\right) - \frac{d}{y}\left(\frac{ma}{s}\right)\frac{d}{x}\left(\frac{na}{s}\right)}$$

Die Nenner dieser Ausdrücke (629. u. 630.) sind gleich. Setzt man also

$$631.\quad 1 - \frac{d}{x}\left(\frac{ma}{s}\right) - \frac{d}{y}\left(\frac{na}{s}\right) + \frac{d}{x}\left(\frac{ma}{s}\right)\frac{d}{y}\left(\frac{na}{s}\right) - \frac{d}{y}\left(\frac{ma}{s}\right)\frac{d}{x}\left(\frac{na}{s}\right) = P,$$

so ist

$$632.\quad \frac{d}{u}x = \frac{1 - \frac{d}{y}\left(\frac{na}{s}\right)}{P} \text{ und } \frac{d}{u}y = \frac{\frac{d}{x}\left(\frac{na}{s}\right)}{P}$$

Substituirt man diese Werthe von $\frac{d}{u}x$ und $\frac{d}{u}y$, desgleichen diejenigen von $\frac{d}{x}w$ und $\frac{d}{y}w$ (623. und 625.) in den Ausdruck von $\frac{d}{u}w$ (621.), so erhält man

$$633.\quad \frac{d}{u}w$$

$$= \left[\frac{d}{x}z + \frac{d}{x}\left(\frac{a}{s}\right)\right] \cdot \frac{1 - \frac{d}{y}\left(\frac{na}{s}\right)}{P} + \left[\frac{d}{x}z + \frac{d}{y}\left(\frac{a}{s}\right)\right] \cdot \frac{\frac{d}{x}\left(\frac{na}{s}\right)}{P}.$$

IV. In diesem Ausdruck, welcher rechter Hand nur noch x, y, z enthält, müssen nun die verschiedenen angedeuteten Ableitungs-Operationen wirklich ausgeführt werden, um eine entwickelte Gleichung zwischen $\frac{d}{u}w$ und den theilweisen Ableitungen von z zu haben.

Die Rechnung ist etwas weitläuftig und verwickelt. Ich könnte sie, um den Raum zu ersparen, dem Leser überlassen; allein da sie ein interessantes Beispiel von dem Nutzen und der Deutlichkeit consequenterer Zeichen giebt, und ich sie einmal, um das Resultat zu finden, habe machen müssen, so setze ich sie ausführlich her.

Es war $s = \sqrt{(1 + m^2 + n^2)} = \sqrt{(1 + \frac{d}{x} z^2 + \frac{d}{y} z^2)}$ (614. u. 616.) Dieses giebt

634. $\frac{d}{x} s$

$$= \frac{\frac{d}{x} z . \frac{d^2}{x^2} z + \frac{d}{y} z \frac{d^2}{xy} z}{s} \text{ und } \frac{d}{y} s = \frac{\frac{d}{x} z \frac{d^2}{xy} z + \frac{d}{y} z \frac{d^2}{y^2} z}{s}$$

Nun ist aus (633.)

$$P. \frac{d}{u} w = \left(\frac{d}{x} z - a. \frac{\frac{d}{x} s}{s^2}\right) \left(1 - a \frac{s \frac{d}{y} n - n \frac{d}{y} s}{s^2}\right)$$

$$+ \left(\frac{d}{y} z - a \frac{\frac{d}{y} s}{s^2}\right) \left(\frac{s \frac{d}{x} n - n \frac{d}{x} s}{s^2}\right). a$$

oder

$$P s^4 \frac{d}{u} w = (s^2 \frac{d}{x} z - a \frac{d}{x} s)(s^2 - as \frac{d}{y} n + an \frac{d}{y} s)$$

$$+ a(s^2 \frac{d}{y} z - a \frac{d}{y} s)(s \frac{d}{x} n - n \frac{d}{x} s)$$

oder, weil $m = \frac{d}{x} z$, $n = \frac{d}{y} z$ war (610.)

$$P s^4 \frac{d}{u} w = (s^2 \frac{d}{x} z - a \frac{d}{x} s)(s^2 - as \frac{d^2}{y^2} z + a \frac{d}{y} z \frac{d}{y} s)$$

$$+ a(s^2 \frac{d}{y} z - a \frac{d}{y} s)(s \frac{d^2}{xy} z - \frac{d}{y} z \frac{d}{x} s),$$

oder

$$Ps^4 \frac{d}{u} w = s^4 \frac{d}{x} z - as^3 \frac{d}{x} z \frac{d^2}{y^2} z + as^2 \frac{d}{x} z \frac{d}{y} z \frac{d}{y} s$$
$$- s^2 a \frac{d}{x} s + a^2 s \frac{d}{x} s \frac{d^2}{y^2} z - a^2 \frac{d}{x} s \frac{d}{y} z \frac{d}{y} s$$
$$+ as^3 \frac{d}{y} z \frac{d^2}{xy} z - as^2 \frac{d}{y} z^2 \frac{d}{x} s - a^2 s \frac{d}{y} s \frac{d^2}{xy} z$$
$$+ a^2 \frac{d}{y} s \frac{d}{y} z \frac{d}{x} s$$

wo sich rechter Hand die letzten Glieder der zweiten und dritten Reihe aufheben. Läßt man sie weg und setzt die Werthe von $\frac{d}{x} s$ und $\frac{d}{y} s$ aus (604.), so erhält man

$$Ps^4 \frac{d}{u} w$$
$$= s^4 \frac{d}{x} z - as^3 \frac{d}{x} z \frac{d^2}{y^2} z + as \frac{d}{y} z \frac{d}{x} z^2 \frac{d^2}{xy} z + as \frac{d}{x} z \frac{d}{y} z^2 \frac{d^2}{y^2} z$$
$$- as \frac{d}{x} z \frac{d^2}{x^2} z - as \frac{d}{y} z \frac{d^2}{xy} z$$
$$+ a^2 \frac{d^2}{y^2} z \frac{d}{x} z \frac{d^2}{x^2} z + a^2 \frac{d}{y} z \frac{d^2}{y^2} z \frac{d^2}{xy} z$$
$$+ as^3 \frac{d}{y} z \frac{d^2}{xy} z - as \frac{d}{y} z^2 \frac{d}{x} z \frac{d^2}{x^2} z - as \frac{d}{y} z^3 \frac{d^2}{xy} z$$
$$- a^2 \frac{d}{x} z \frac{d^2}{xy} z^2 - a^2 \frac{d}{y} z \frac{d^2}{y^2} z \frac{d^2}{xy} z;$$

Hier heben sich die letzten Glieder der dritten und fünften Reihe rechter Hand auf. Läßt man sie weg und hebt die allgemeinen Factoren heraus, so erhält man

$$Ps^4 \frac{d}{u} w$$
$$= \frac{d}{x} z \Big[s^4 - as^3 \frac{d^2}{y^2} z + as \frac{d}{x} z \frac{d}{y} z \frac{d^2}{xy} z + as \frac{d}{y} z \frac{d^2}{y^2} z$$
$$- as \frac{d^2}{x^2} z + a^2 \frac{d^2}{y^2} z \frac{d^2}{x^2} z - as \frac{d}{y} z^2 \frac{d^2}{x^2} z - a^2 \frac{d^2}{xy} z^2 \Big]$$
$$- as \frac{d^2}{xy} z \frac{d}{y} z \Big[1 - s^2 + \frac{d}{y} z^2 \Big];$$

folglich, weil $s^2 = 1 + \frac{d}{x} z^2 + \frac{d}{y} z^2$ (616.), und also

$$1 - s^2 + \frac{d}{y} z^2 = 1 - 1 - \frac{d}{x} z^2 - \frac{d}{y} z^2 + \frac{d}{y} z^2 = - \frac{d}{x} z^2$$

ist,

$$Ps^4 \frac{d}{u} w = \frac{d}{x} z \Big[s^4 - as^3 \frac{d^2}{y^2} z + as \frac{d}{y} z \frac{d}{x} z \frac{d^2}{xy} z$$
$$+ as \frac{d}{y} z^2 \frac{d^2}{y^2} z - as \frac{d^2}{x^2} z + a^2 \frac{d^2}{y^2} z \frac{d^2}{x^2} z$$
$$- as \frac{d}{y} z^2 \frac{d^2}{x^2} z - as \frac{d^2}{xy} z^2 + as \frac{d}{y} z \frac{d}{x} z \frac{d^2}{xy} z \Big]$$

oder

$$\frac{Ps^4 \frac{d}{u} w}{\frac{d}{x} z} = s^4 - as \Big[s^2 \frac{d^2}{y^2} z - 2 \frac{d}{y} z \frac{d}{x} z \frac{d^2}{xy} z - \frac{d}{y} z^2 \frac{d^2}{y^2} z$$
$$+ \frac{d}{y} z^2 \frac{d^2}{x^2} z^2 + \frac{d^2}{x^2} z \Big]$$
$$+ a^2 \left(\frac{d^2}{y^2} z \frac{d^2}{x^2} z - \frac{d^2}{xy} z^2 \right)$$

oder, weil $s^2 \frac{d^2}{y^2} z = \frac{d^2}{y^2} z + \frac{d}{x} z^2 \frac{d^2}{y^2} z + \frac{d}{y} z^2 \frac{d^2}{y^2} z$ ist,

$$635. \quad \frac{Ps^4 \frac{d}{u} w}{\frac{d}{x} z} = s^4 - as \Big[\frac{d^2}{y^2} z - \frac{d}{x} z^2 \frac{d^2}{y^2} z + \frac{d^2}{x^2} z$$
$$+ \frac{d}{y} z^2 \frac{d^2}{x^2} z - 2 \frac{d}{y} z \frac{d}{x} z \frac{d^2}{xy} z \Big]$$
$$+ a^2 \left(\frac{d^2}{y^2} z \frac{d^2}{x^2} z - \frac{d^2}{xy} z^2 \right).$$

Die Größe P war

$$1 - \frac{d}{x}\left(\frac{ma}{s}\right) - \frac{d}{y}\left(\frac{na}{s}\right) + \frac{d}{x}\left(\frac{ma}{s}\right)\frac{d}{y}\left(\frac{na}{s}\right) - \frac{d}{y}\left(\frac{ma}{s}\right)\frac{d}{x}\left(\frac{na}{s}\right)$$

(631.)

Führt man die darin angedeuteten Ableitungs-Operationen aus, so erhält man

$$P = 1 - a \frac{s\frac{d}{x}m - m\frac{d}{x}s}{s^2} - a \frac{s\frac{d}{y}n - n\frac{d}{y}s}{s^2}$$

$$+ a^2 \frac{\left(s\frac{d}{x}m - m\frac{d}{x}s\right)\left(s\frac{d}{y}n - n\frac{d}{y}s\right)}{s^4}$$

$$- a^2 \frac{\left(s\frac{d}{y}m - m\frac{d}{y}s\right)\left(s\frac{d}{x}n - n\frac{d}{x}s\right)}{s^4}$$

oder, wenn man die Werthe von m und n, nämlich $m = \frac{d}{x}z$ und $n = \frac{d}{y}z$ (610.) setzt, und zugleich den Ausdruck entwickelt,

$$Ps^4 = s^4 - as^2\left(s\frac{d^2}{x^2}z - \frac{d}{x}z\frac{d}{x}s + s\frac{d^2}{y^2}z - \frac{d}{y}z\frac{d}{y}z\right)$$

$$+ a^2\left(s^2\frac{d^2}{x^2}z\frac{d^2}{y^2}z - s\frac{d}{y}z\frac{d^2}{x^2}z\frac{d}{y}s - \frac{d}{x}z.\,s\frac{d^2}{y^2}z\frac{d}{x}s\right.$$

$$\left. + \frac{d}{x}z\frac{d}{y}z\frac{d}{x}s\frac{d}{y}s\right)$$

$$- a^2\left(s^2\frac{d^2}{xy}z^2 - s\frac{d}{y}z\frac{d^2}{xy}z\frac{d}{x}s - \frac{d}{x}z\frac{d^2}{xy}z\frac{d}{y}s\right.$$

$$\left. + \frac{d}{x}z\frac{d}{y}z\frac{d}{x}s\frac{d}{y}s\right).$$

Die letzten Glieder der zweiten und dritten Reihe heben sich in diesem Ausdruck auf. Läßt man sie weg, und setzt zugleich die Werthe von $\frac{d}{x}s$ und $\frac{d}{y}s$ aus (634.), nämlich

$$\frac{d}{x}s = \frac{\frac{d}{x}z\frac{d^2}{x^2}z + \frac{d}{y}z\frac{d^2}{xy}z}{s} \text{ und } \frac{d}{y}s = \frac{\frac{d}{x}z\frac{d^2}{xy}z + \frac{d}{x}z\frac{d^2}{y^2}z}{s},$$

so erhält man

$$Ps^4 = s^4 - as\left[s^2 \frac{d^2}{x^2} z - \frac{d}{x} z^2 \frac{d^2}{x^2} z - \frac{d}{x} z \frac{d}{y} z \frac{d^2}{xy} z\right.$$

$$\left. + s^2 \frac{d^2}{y^2} z - \frac{d}{y} z^2 \frac{d^2}{y^2} z - \frac{d}{x} z \frac{d}{y} z \frac{d^2}{xy} z\right]$$

$$+ a^2\left[s^2 \frac{d^2}{x^2} z \frac{d^2}{y^2} z - \frac{d}{y} z \frac{d}{x} z \frac{d^2}{x^2} z \frac{d^2}{xy} z - \frac{d}{y} z^2 \frac{d^2}{x^2} z \frac{d^2}{y^2} z\right.$$

$$\left. - \frac{d}{x} z^2 \frac{d^2}{x^2} z \frac{d^2}{y^2} z - \frac{d}{x} z \frac{d}{y} z \frac{d^2}{xy} z \frac{d^2}{y^2} z\right]$$

$$- a^2\left[s^2 \frac{d^2}{xy} z^2 - \frac{d}{y} z \frac{d}{x} z \frac{d^2}{x^2} z \frac{d^2}{xy} z - \frac{d}{y} z^2 \frac{d^2}{xy} z^2\right.$$

$$\left. - \frac{d}{x} z^2 \frac{d^2}{xy} z^2 - \frac{d}{x} z \frac{d}{y} z \frac{d^2}{xy} z \frac{d^2}{y^2} z\right].$$

Die zweiten Glieder der dritten und fünften und die letzten der vierten und sechsten Reihe rechter Hand, heben sich in diesem Ausdruck auf. Läßt man sie weg und zieht sonst den Ausdruck zusammen, so erhält man

$$Ps^4 = s^4 - as\left[\left(s^2 - \frac{d}{x} z^2\right) \frac{d^2}{x^2} z + \left(s^2 - \frac{d}{y} z^2\right) \frac{d^2}{y^2} z\right.$$

$$\left. - 2 \frac{d}{x} z \frac{d}{y} z \frac{d^2}{xy} z\right]$$

$$+ a^2\left[s^2 - \frac{d}{y} z^2 - \frac{d}{x} z^2\right] \frac{d^2}{x^2} z \frac{d^2}{y^3} z$$

$$- a^2\left[s^2 - \frac{d}{y} z^2 - \frac{d}{x} z^2\right] \frac{d^2}{xy} z^2$$

oder, weil $s^2 = 1 + \frac{d}{x} z^2 + \frac{d}{y} z^2$ ist (616.),

$$Ps^4 = s^4$$

$$- as\left[\left(1 + \frac{d}{y} z^2\right) \frac{d^2}{x^2} z + \left(1 + \frac{d}{x} z^2\right) \frac{d^2}{y^2} z - z \frac{d}{x} z \frac{d}{y} x \frac{d^2}{xy} z\right]$$

$$+ a^2\left(\frac{d^2}{x^2} z \frac{d^2}{y^2} z - \frac{d^2}{xy} z^2\right),$$

oder

636. $Ps^4 = s^4 = as\left[\frac{d^2}{y^2}z + \frac{d}{x}z^2\frac{d^2}{y^2}z + \frac{d}{x}z^2 + \frac{d}{y}z^2\frac{d^2}{x^2}z\right.$

$$\left. - 2\frac{d}{x}z\frac{d}{y}z\frac{d^2}{xy}z\right]$$

$$+ a^2\left(\frac{d^2}{y^2}z\frac{d^2}{x^2}z - \frac{d^2}{xy}z^2\right).$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit (635.), so findet sich, daß

$$\frac{Ps^4\frac{d}{u}w}{\frac{d}{x}z} = Ps^4$$

ist, woraus folgt

637. $\frac{d}{u}w = \frac{d}{x}z.$

V. Es ist nicht nöthig, die Rechnung für den Werth von $\frac{d}{v}w$ zu wiederholen. Denn da man die Buchstaben verwechseln kann, nämlich v mit u, y mit x, so folgt unmittelbar, daß auch

638. $\frac{d}{v}w = \frac{d}{y}z$

ist.

VI. Es findet also wirklich Statt, was in (I.) vermuthet wurde, nämlich daß $\frac{d}{u}w = \frac{d}{x}z$ und $\frac{d}{v}w = \frac{d}{y}z$ ist, und daß also die Bedingungen der Wechselseitigkeit des Parallelismus auch bei Flächen erfüllt werden.

VII. Man hat also den allgemeinen Lehrsatz, daß, wenn eine krumme Fläche alle Normalen einer andern gegebenen krummen Fläche, in gleichen Entfernungen von den letztern schneidet, so daß die erste Fläche parallel mit der zweiten ist, daß dann auch umgekehrt die zweite Fläche parallel mit der ersten läuft; das heißt, daß die Normalen der ersten Fläche mit den Normalen der zweiten zusammenfallen, und daß also die beiden Flächen wechselseitig vollkommen parallel sind.

329.

Der Inhalt einer krummen Fläche ist für sie das, was für eine Curve die Länge ist. Der Raum zwischen parallelen Flächen und einer beliebigen, von den Normalen der parallelen Flächen gebildeten Fläche, läßt sich mit dem Raum zwischen zwei parallelen Curven in der Ebene, und den Normalen an ihren Enden vergleichen. Es ließe sich also vermuthen, daß auch für den Inhalt krummer Flächen, und den Raum, welchen sie einschließen, ähnliche Sätze, wie für die Länge und Fläche paralleler Curven in der Ebene, Statt finden.

Es ist aber leicht zu zeigen, daß dergleichen Sätze nicht existiren. Denn wenn sie allgemein gälten, so würden sie auch für einzelne Fälle Statt finden. Der einfachste Fall paralleler Flächen ist der, concentrischer Kugelflächen. Es sei r der Halbmesser der innern Kugel, so ist der körperliche Inhalt dieser Kugel $\frac{4}{3}r^3\pi$ und ihre Oberfläche $4r^2\pi$. Der Abstand zwischen den beiden Kugelflächen sei a, so ist der körperliche Inhalt der äußern Kugel $\frac{4}{3}(r+a)^3\pi$ und die Oberfläche der äußern Kugel $4(r+a)^2\pi$. Also ist der Inhalt des Körpers zwischen den beiden Kugelflächen $\frac{4}{3}(r+a)^3\pi - \frac{4}{3}r^3\pi = \frac{4}{3}a^3\pi - 4ra\pi\,(r+a)$ und der Unterschied der Oberflächen der äußern und innern Kugel $4(r+a)^2\pi - 4r^2\pi = 4a\pi(a+2r)$. Daraus folgt, daß weder der körperliche Inhalt, noch der Unterschied der Oberflächen des Körpers zwischen den beiden Kugelflächen, von den Abmessungen des innern Körpers unabhängig ist, wie es bei den Sätzen von parallelen Curven in der Ebene der Fall war. Folglich finden ähnliche Lehrsätze, wie für parallele Curven in der Ebene, für parallele Flächen nicht Statt.

330.

Wollte man auf eine allgemeine Weise den Inhalt einer mit einer gegebenen, parallel laufenden Fläche ausdrücken, und bezeichnete den Inhalt der gegebenen Fläche mit s, den Inhalt des correspondirenden Theils der parallelen Fläche mit σ, so würde

639. $\frac{d^2}{uv}\sigma = \sqrt{(1 + \frac{d}{u}w^2 + \frac{d}{v}w^2)}$ und

640. $$\frac{d^2}{xy} s = \sqrt{(1 + \frac{d}{x} z^2 + \frac{d}{y} z^2)},$$

also, weil $\frac{d}{u} w = \frac{d}{x} z$ und $\frac{d}{v} w = \frac{d}{y} z$ ist (637. 638.),

641. $$\frac{d^2}{uv} \sigma = \frac{d^2}{xy} s$$

sein.

Nun ist

$$\frac{d^2}{uv} \sigma = \frac{d}{u}\left(\frac{d}{v} \sigma\right) = \frac{d}{x}\left(\frac{d}{v} \sigma\right)\frac{d}{u} x + \frac{d}{y}\left(\frac{d}{v} \sigma\right)\frac{d}{u} y.$$

Ferner ist

$$\frac{d}{v} \sigma = \frac{d}{y} \sigma \frac{d}{u} y + \frac{d}{x} \sigma \frac{d}{u} x,$$

also

$$\frac{d}{x}\left(\frac{d}{v} \sigma\right) = \frac{d^2}{xy} \sigma \frac{d}{u} y + \frac{d^2}{x^2} \sigma \frac{d}{u} x, \text{ und}$$

$$\frac{d}{y}\left(\frac{d}{v} \sigma\right) = \frac{d^2}{y^2} \sigma \frac{d}{u} y + \frac{d^2}{xy} \sigma \frac{d}{u} x; \text{ also}$$

$$\frac{d^2}{uv} \sigma = \frac{d^2}{xy} \sigma . \frac{d}{u} y \frac{d}{u} x \, t \, \frac{d^2}{x^2} \sigma \frac{d}{u} x^2 + \frac{d^2}{y^2} \sigma \frac{d}{u} y^2 + \frac{d^2}{xy} \sigma \frac{d}{u} x \frac{d}{u} y,$$

oder

642. $$\frac{d^2}{uv} \sigma = \frac{d^2}{xy} s = \frac{d^2}{x^2} \sigma \frac{d}{u} x^2 + \frac{d^2}{y^2} \sigma \frac{d}{u} y^2 + 2 \frac{d^2}{xy} \sigma \frac{d}{u} x \frac{d}{u} y.$$

Diese abgeleitete Gleichung giebt den gesuchten Ausdruck von $\frac{d^2}{uv} \sigma$ durch s, x und y, aber unentwickelt. Man muß also die Gleichung erst auflösen, was in einzelnen bestimmten Fällen geschehen kann.

331.

Hat man die Ausdrücke von $\frac{d^2}{uv} \sigma$ und $\frac{d^2}{xy} s$ in x uud y gefunden, so giebt sich auch der Ausdruck der Ableitung des körperlichen Inhalts und des Raumes zwischen den parallelen Flächen, denn es läßt sich zeigen, daß diese Ableitung, von

dem Ausdruck des Inhalts des Ausschnitts, eines zwischen zwei concentrischen Kugelflächen liegenden Körpers, abhängt, dessen parallele Grundflächen $\frac{d^2}{uv}\sigma$ und $\frac{d^2}{xy}s$ sind, und dessen Höhe a ist. Die Anwendung dieser Formeln, besonders auf developpable Flächen, würde interessant sein.

C. Vom Parallelismus der Curven doppelter Krümmung.

332.

Wendet man die obige Definition paralleler Curven in der Ebene und paralleler Flächen, auf Curven doppelter Krümmung an, so ist leicht zu sehen, daß eine Curve doppelter Krümmung nicht bloß eine oder zwei Parallelen habe, wie eine Curve in der Ebene, sondern deren unzählige.

Denn man kann auf die Tangenten einer Curve doppelter Krümmung nach allen möglichen Richtungen Normalen ziehen, und schneidet man diese Normalen alle in gleicher Länge ab, so entstehet um jede Tangente ein Kreis-Umfang, welcher den Abstand a der gegebenen Curve von ihren Parallelen, zum Halbmesser hat. Da aber durch das Ende jeder Normale eine Curve mit der gegebenen parallel laufen kann, so ist leicht zu sehen, daß die Zahl der möglichen, mit den gegebenen parallelen Curven, unendlich groß ist.

333.

Alle die unzähligen Parallelen einer Curve doppelter Krümmung bilden eine krumme Fläche, welche die Gestalt der Wände einer Röhre hat, deren Querschnitt, senkrecht auf die gegebene Curve, gleich große Kreise sind, deren Halbmesser a ist, so daß die gegebene Curve doppelter Krümmung die centrische Linie dieser mit ihr parallelen Fläche ist.

Mit einer Curve doppelter Krümmung kann also nicht allein eine unbegrenzte Zahl anderer Curven, sondern selbst eine Fläche parallel sein, in welcher alle jene Curven liegen.

334.

Legt man durch eine beliebige Tangente einer Curve doppelter Krümmung eine Ebene, nach einer beliebigen Richtung, und zieht darauf eine Normale durch den Berührungspunkt, so wird die Ebene, welche die mit der gegebenen Curve parallele Fläche in dem Punkt berührt, in welchem die Normale die parallele Fläche schneidet, mit jener willkührlichen Ebene durch die Tangente der gegebenen Curve, parallel sein.

Denn man stelle sich zwei, mit einer und derselben Curve doppelter Krümmung parallele, also concentrische Flächen vor, so sind diese Flächen unstreitig auch mit einander parallel; denn da sie auf einerlei Normalen senkrecht stehen, so fallen ihre Normalen in einander.

Nun aber sind die Ebenen, welche zwei parallele Flächen in den Punkten berühren, wo sie von einer und derselben Normale geschnitten werden, mit einander parallel (§. 328.) Also sind auch die Ebenen, welche die beiden obigen concentrischen röhrenförmigen Flächen, in den Punkten berühren, in welchen eine und dieselbe Normale sie schneidet, ebenfalls unter einander parallel.

Man setze, der Durchmesser der innern röhrenförmigen Fläche nehme immerfort ab. Verschwindet er endlich, so fällt die innere Fläche mit der centrischen Linie zusammen und alle Ebenen, welche die innere Fläche in den Punkten berühren, in welchen die Normalen auf eine und dieselbe Tangente der centrischen Linie, die Fläche schneiden, gehen nunmehr durch die Tangente. Legt man also in der Entfernung a, Ebenen mit denen parallel, welche die äußere Fläche berühren, so gehen alle diese Ebenen nothwendig durch die correspondirenden Tangenten der centrischen Linie.

335.

Die Gleichung der mit einer Curve doppelter Krümmung parallelen Fläche kann man, wie folgt, finden.

x, y und z sollen die rechtwinkligen Coordinaten der gegebenen Linie doppelter Krümmung sein; u, v, w die rechtwinkligen Coordinaten einer beliebigen, auf die Tangente

der gegebenen Curve im Punkte x, y, z senkrechten Ebene, so ist die Gleichung dieser Ebene, wie in der Geometrie bewiesen wird,

$$643.\quad u + v\frac{d}{x}y + w\frac{d}{x}z = \overset{1}{a}.$$

Soll diese Ebene durch den Punkt x, y, z gehen, so ist

$$644.\quad x + y\frac{d}{x}y + z\frac{d}{x}z = \overset{1}{a}.$$

Zieht man die Gleichungen (643. und 644.) von einander ab, so erhält man

$$645.\quad u - x + (v - y)\frac{d}{x}y + (w - z)\frac{d}{x}z = 0,$$

welches die Gleichung der auf die Tangente einer Curve doppelter Krümmung senkrechten, durch den Berührungs-Punkt gehenden Ebene ist.

Für einen Augenblick mögen u, v, w die Coordinaten der Punkte sein, welche in der Normal-Ebene, um a vom Berührungs-Punkt entfernt, liegen, so ist für alle diese Punkte

$$646.\quad (u - x)^2 + (v - y)^2 + (w - z)^2 = a^2.$$

Die beiden Gleichungen (645. u. 646.) enthalten x, y, z und u, v und w. Vermöge der Gleichungen der centrischen Curve kann man aber y und z in x ausdrücken. Substituirt man die Werthe von y und z, in x ausgedrückt, in die beiden Gleichungen (645. und 646), so enthalten sie nur noch u, v, w und x. Eliminirt man also zwischen den beiden Gleichungen x, so erhält man eine Gleichung zwischen u, v und w, welche die gesuchte Gleichung der mit der gegebenen Curve doppelter Krümmung parallel laufenden Fläche ist.

Man setze, um ein Beispiel zu geben, die centrische Linie sei ein Kreis-Umfang vom Halbmesser r, in der Ebene der x, y, so ist dessen Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

denn z ist hier gleich Null. Man findet daraus $x + y\frac{d}{x}y = 0$,

also $\frac{d}{x} y = - \frac{x}{y}$. Dieses in die Gleichung (645.) gesetzt, giebt $u - x - (v - y) \frac{x}{y} = 0$, oder $y(u - x) = (v - y)x$, oder $yu = vx$. Die Gleichung (646.) giebt hier $(u - x)^2 + (v - y)^2 + w^2 = a^2$, oder, wenn man darin $v - y = \frac{y}{x}(u - x)$ setzt, $(u - x)^2 (1 + \frac{y^2}{x^2}) = a^2 - w^2$, oder $(u - x)^2 r^2 = x^2 (a^2 - w^2)$. Da nun $vx = yu$ war, so ist $x = y . \frac{u}{v}$ oder $x^2 = y^2 \frac{u^2}{v^2} = (r^2 - x^2) \frac{u^2}{v^2}$, oder $x^2 (1 + \frac{u^2}{v^2}) = r^2 . \frac{u^2}{v^2}$, oder $x^2 (u^2 + v^2) = r^2 u^2$, oder $x = \frac{ru}{\sqrt{(u^2 + v^2)}}$; also vorhin $\left(u - \frac{ru}{\sqrt{(u^2 + v^2)}}\right)^2 r^2 = \frac{r^2 u^2}{u^2 + v^2} (a^2 - w^2)$, oder, nach gehöriger Reduction,

$$647. \left\{ \begin{array}{l} a^4 + r^4 + u^4 + v^4 + w^4 \\ - 2r^2 (u^2 + v^2 + w^2 + a^2) \\ - 2a^2 (w^2 - u^2 - v^2) + 2w^2 (u^2 + v^2) = 0, \end{array} \right.$$

welches die Gleichung der mit einem Kreise in der Ebene vom Halbmesser r, parallel laufenden Fläche ist.

336.

Unter den Linien doppelter Krümmung, die in der, mit einer gegebenen Curve doppelter Krümmung parallelen Fläche gezogen werden können, sind diejenigen bemerkenswerth, deren Tangenten an den Punkten, in welchen die Normalen der gegebenen Curve sie schneiden, mit den Tangenten der gegebenen Linie, an den Durchschnitts-Punkten der Curve und der nämlichen Normalen, parallel laufen. Die Linien sind vollkommen parallel mit der gegebenen Curve.

Um ihre Gleichungen zu finden, darf man nur

$$648. \quad \frac{d}{x} y = \frac{d}{u} v \text{ und } \frac{d}{x} z = \frac{d}{u} w$$

setzen, weil diese Gleichungen die Bedingungen des Paralle-

lismus der, einer und derselben Normale entsprechenden Tangenten zweier Curven, ausdrücken.

Da y und z, vermöge der Gleichungen der gegebenen Curve, in x ausgedrückt sind, so hat man auch $\frac{d}{x}y$ und $\frac{d}{x}z$ in x; also hat man x in $\frac{d}{u}v$ und $\frac{d}{u}w$. Nun kann man aber machen, daß die Gleichungen (645. und 646.) nur u, v, w und x enthalten. Substituirt man also die Werthe von x in $\frac{d}{u}v$ und $\frac{d}{u}w$, so erhält man zwei Gleichungen zwischen u, v, w und $\frac{d}{u}v$ und $\frac{d}{u}w$, welche die gesuchten Gleichungen der vollkommnen parallelen Curve sind, nämlich die Gleichungen zweier krummer Flächen, deren Durchschnitt die vollkommen parallele Curve ist.

337.

Der Inhalt einer Fläche, die mit einer gegebenen Curve doppelter Krümmung parallel ist, so wie der Inhalt des röhrenförmigen Körpers, welchen sie umschließt, lassen sich, wie folgt, finden.

Es läßt sich nämlich zeigen, daß die ersten Ableitungen der Oberfläche und des Inhalts jenes röhrenförmigen Körpers die nämlichen sind, die centrische Linie mag krumm oder grade sein.

Daraus folgt, daß der Inhalt und die Oberfläche des Körpers, welchen eine mit einer gegebenen Curve doppelter Krümmung parallele Fläche, mit zwei, auf die gegebene Curve senkrechten Ebenen an den Enden, einschließt, gleich ist dem Inhalt und der Oberfläche eines graden Cylinders, dessen Grundfläche dem senkrechten Querschnitte an den Enden, und dessen Höhe der Länge der centrischen Linie gleich ist.

Diese Sätze sind denen für parallele Curven in der Ebene ähnlich.

338.

Ich überlasse die Forsetzung dieser Untersuchungen dem

Leser, und schließe mit einer Uebersicht der hier über den Parallelismus der Curven einfacher und doppelter Krümmung und der Flächen gefundenen Sätze.

Erster Lehrsatz. Wenn man an eine gegebene Curve in der Ebene, Normalen zieht, und durch diejenigen Punkte dieser Normalen, welche gleich weit von der gegebenen Curve entfernt sind, eine zweite Curve legt, so daß diese zweite Curve mit der gegebenen parallel ist, so fallen die Normalen dieser neuen Curve, mit den Normalen der gegebenen, zusammen. Alle ihre Tangenten in den Punkten, in welchen eine und dieselbe Normale die beiden Curven schneidet, sind parallel, und der Parallelismus der Curven findet allemal wechselseitig Statt.

Zweiter Lehrsatz. Alle mit einer gegebenen Curve parallele Curven in der Ebene haben mit der gegebenen Curve einerlei Evolute. Sie werden von festen Punkten des abgewickelten Fadens beschrieben.

Dritter Lehrsatz. Der Unterschied der Länge zweier parallelen Curven in der Ebene ist der Länge eines Kreisbogens gleich, welcher die Entfernung der beiden Curven von einander zum Halbmesser, und den Winkel zwischen den gemeinschaftlichen Normalen an den Enden, zum Maaß hat.

Vierter Lehrsatz. Man nenne die Curve, welche alle gemeinschaftliche Normalen zweier parallelen Curven halbirt, centrische Linie. Die Länge dieser centrischen Linie ist gleich der halben Summe der Längen zweier correspondirenden parallelen Curven-Bogen zwischen den Normalen an den Enden.

Fünfter Lehrsatz. Die Fläche, welche zwei beliebige parallele Curven-Bogen in der Ebene, mit den gemeinschaftlichen Normalen an den Enden einschließen, ist so groß als die Fläche eines Parallelogramms, welches die Länge der centrischen Curve zur Grundlinie, und den Abstand der beiden parallelen Curven zur Höhe hat.

Sechster Lehrsatz. Der Unterschied zwischen dem Inhalt eines Parallelogramms, welches eine von zwei parallelen Curven zur Grundlinie und die Entfernung der Curven von

einander zur Höhe hat, und der Fläche zwischen den beiden Curven und ihren Normalen an den Enden, ist der Fläche eines Kreisausschnitts gleich, der den Abstand der Curven zum Halbmesser und den Winkel zwischen den Normalen an den Enden zum Maaß hat.

Siebenter Lehrsatz: Wenn man an eine gegebene krumme Fläche Normalen zieht, und durch diejenigen Punkte dieser Normalen, welche von der gegebenen Fläche gleich weit entfernt sind, eine zweite krumme Fläche legt, so daß diese zweite Fläche mit der gegebenen parallel läuft, so fallen alle Normalen der zweiten Fläche mit denen der gegebenen zusammen; alle berührenden Ebenen, in den Punkten, wo ein und dieselbe Normale die beiden Flächen schneidet, sind parallel, und der Parallelismus der beiden Ebenen findet allemal wechselseitig Statt.

Achter Lehrsatz. Sätze wie der vierte, fünfte, sechste und siebente, finden für parallele Flächen nicht Statt.

Neunter Lehrsatz. Es giebt allemal Flächen, von der Gestalt der Wände einer Röhre, die mit einer gegebenen Curve doppelter Krümmung parallel sind. Die Querschnitte, senkrecht auf die gegebene Linie, die dann die centrische ist, sind gleiche Kreise, deren Halbmesser der Entfernung der parallelen Fläche von der centrischen Linie gleich sind.

Zehnter Lehrsatz. Jede Ebene, die man durch die Tangente einer Curve doppelter Krümmung legen kann, ist parallel mit der Ebene, welche die parallele Fläche in dem Punkte berührt, in welchem die Normale auf die centrische Linie und auf die willkührliche Ebene, die parallele Fläche schneidet.

Eilfter Lehrsatz. In jeder mit einer gegebenen Curve doppelter Krümmung parallelen Fläche kann man Linien doppelter Krümmung ziehen, deren Tangenten mit den correspondirenden Tangenten der gegebenen Curve parallel sind.

Zwölfter Lehrsatz. Der Inhalt einer, mit einer gegebenen Curve doppelter Krümmung parallelen Fläche, ist gleich der krummen Oberfläche eines graden Cylinders, dessen Grundfläche den senkrechten Querschnitten auf die centrische Linie,

und dessen Höhe der Länge der centrischen Linie zwischen den Querschnitten an den Enden gleich ist.

Dreizehnter Lehrsatz. Der Inhalt des Körpers, welchen eine, mit einer gegebenen Curve doppelter Krümmung parallele Fläche, mit zwei beliebigen senkrechten Querschnitten auf die gegebene Curve begrenzt, ist dem Inhalt eines graden Cylinders gleich, der die Querschnitte zu Grundflächen und die Länge der centrischen Linie zwischen den beiden Querschnitten, zur Höhe hat.

Die Untersuchungen lassen sich noch auf krumme Flächen und Curven doppelter Krümmung von bestimmten Eigenschaften anwenden, zum Beispiel auf developpable Flächen. Dergleichen würden vielleicht interessante Resultate liefern.

339.

Man könnte auch den obigen Untersuchungen noch eine viel größere Ausdehnung geben, wenn man Curven und krumme Flächen suchte, die mit gegebenen Curven und krummen Flächen, nicht sowohl parallel sind, als vielmehr überall gleiche Neigung gegen dieselben haben, zum Beispiel auf die Weise, wie eine grade Linie in der Ebene, die mit einer andern graden Linie nicht parallel ist, mit derselben überall den nämlichen Winkel macht. Auf diese Weise könnte man, so wie hier ebene und schiefe Parallelogramme und Parallelepipeden mit krummen Grundflächen construirt worden sind, ebene und schiefe Dreiecke und Vielecke mit krummen Seiten, oder Pyramiden und Polyëder mit krummen Flächen construiren.

Diese Figuren einer neuen Art würden wahrscheinlich mehrere merkwürdige Sätze darbieten.

340.

Ich will schließlich darauf aufmerksam machen, daß das obige absichtliche Vermeiden aller Figuren bei diesen rein geometrischen Gegenständen, der Untersuchung in der That günstig gewesen ist und sie erleichtert hat. Je allgemeiner mathematische Untersuchungen sind, je mehr sind Figuren, nicht allein entbehrlich, sondern sogar der Deutlichkeit nachtheilig. Besonders Gegenstände im Raume stellt man sich in Gedan-

ken leichter und besser vor, als auf der Ebene des Papiers. Soll die Mathematik zur Uebung und Schärfung des Verstandes dienen, so würde ich, anstatt so viel möglich, sogenannte Constructionen mit Figuren dabei zu gebrauchen, und den Sätzen recht viel Anschauung zu geben, grade umgekehrt, vielmehr die Anschauung so viel möglich vermeiden, und die Untersuchung so abstract machen, als es nur der Gegenstand zuläßt; denn die Anschauung, oder der sinnliche Theil mathematischer Sätze kann wohl nur mehr die untern Seelenkräfte üben. Dagegen scheint die Anstrengung der Einbildungskraft und dann die Uebung in jenen strengen unzweifelhaften Schlüssen, die der Mathematik ausschließlich angehören, ganz geeignet, die Thätigkeit der höhern Kräfte zu erregen und den Verstand an Consequenz zu gewöhnen, was der Zweck solcher Uebungen ist.

13.

Von einigen Fällen der Zurückleitung von Ableitungsgleichungen höherer Ordnung durch Zertheilung und algebraische Auflösung.

I. Von der Zurückleitung durch Zertheilung.

341.

Bekanntlich kann man die Zurückleitung von Ableitungs-Gleichungen, wenn sie sich nicht sogleich von selbst darbietet, in manchen Fällen durch Multiplication erleichtern. Dieses Verfahren ist unter dem Namen des Integrirens mit Hülfe der Multiplicatoren, bekannt.

Aber auch durch Zertheilung lassen sich gewisse Ableitungs-Gleichungen zurückleiten, und zwar nicht durch Division, denn dies wäre nichts anders, als die Anwendung der Multiplicatoren, sondern durch subtractive Theilung oder durch Zerlegung in Aggregate, deren Summe die gegebene Ableitungs-Gleichung wiederum ausmacht. Diese Art der Zurückleitung ist ungewöhnlich. Ich stieß auf ein Beispiel davon zufällig, als ich die Gleichungen der Linien zweiter Ordnung aus ihren catoptrischen Eigenschaften entwickeln wollte. Ich will kürzlich mittheilen, worauf ich gekommen bin.

342.

Die Parabel zweiter Ordnung, oder die sogenannte apollonische Parabel giebt den einfachsten Fall. Bekanntlich hat sie die Eigenschaft, daß, wenn man einem Spiegel ihre Krümme giebt, alle Strahlen, die aus dem Brennpunkt auf die Krümme

fallen, von dieser, parallel mit der Axe, zurückgeworfen werden.

Fig. 27. Es sei B der Brennpunkt der Parabel AM, M ein beliebiger Punkt dieser Curve, so wird der Strahl BM nach MD, parallel mit der Axe AC, zurückgeworfen. Also sind die Winkel BME $= \alpha + \beta$ und DMF $= \gamma$ gleich groß, wenn EF die Tangente an M ist.

Es ist $\frac{EP}{MP} = \frac{1}{dy}$, wenn man x als unabhängig veränderlich und y davon abhängend betrachtet; also ist tang α $= \frac{1}{dy}$, $\frac{BP}{MP} = \frac{a-x}{y}$, also tang $\beta = \frac{a-x}{y}$ und $\frac{MP}{EP} = \frac{y}{1} = dy$; also tang MEP $=$ tang $\gamma = dy$. Da nun $\alpha + \beta = \gamma$ sein soll, so ist auch tang $(\alpha + \beta) =$ tang γ oder $\frac{\text{tang}\,\alpha + \text{tang}\,\beta}{1 - \text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta} = \text{tang}\,\gamma$. Setzt man hierin die Werthe von tang α, tang β und tang γ, so erhält man

$$dy = \frac{\frac{1}{dy} + \frac{a-x}{y}}{1 + \frac{1}{dy} \cdot \frac{a-x}{y}} = \frac{y + (a-x)\,dy}{ydy - (a-x)} \text{ oder}$$

$$ydy^2 - (a-x)\,dy = y + (a-x)\,dy \text{ oder}$$

$$649.\quad y\,(dy^2 - 1) - 2\,(a-x)\,dy = 0.$$

Dieses ist die Ableitungs-Gleichung, welche das nothwendige Verhältniß zwischen x und y, oder die Gleichung derjenigen Curve enthalten muß, welche die Eigenschaft hat, alle Strahlen aus dem Punkt B, parallel mit der Axe AC, zurückzuwerfen.

343.

Da man weiß, daß diese Curve die sogenannte apollonische Parabel ist, so muß die Stammgleichung von (649.) nothwendig mit der Gleichung einer solchen Parabel übereinkommen und also die Form

$$650.\quad y^2 = bx$$

haben. Allein man sieht nicht gleich, wie durch die gewöhnlichen Mittel die Gleichung (650.) aus der Gleichung (649.) gefunden werden könne.

344.

Das Mittel der Zurückleitung durch Zertheilung besteht nun in Folgendem:

Man zerlege die Ableitungs-Gleichung (649.), willkührlich, in zwei andere, deren Summe ihr gleich ist, nämlich in

651. $-y + 2xdy = 0$ und

652. $ydy^2 - 2ady = 0$.

Geben diese beiden Gleichungen einerlei Verhältniß zwischen x und y, so giebt auch ihre Summe das Nämliche, folglich ist die Zerlegung erlaubt, und jede einzelne Gleichung giebt das was die ganze giebt, und folglich das was man sucht.

Ein solcher Fall findet hier wirklich Statt, denn die Gleichung (651.) giebt $\frac{dy}{y} = \frac{1}{2x}$ wovon die Stammgleichung $\log y = \frac{1}{2} \log x + \text{Const.}$ oder wenn $\frac{1}{2}$ Const. $= \log b$ gesetzt wird, $2 \log y = \log x + \log b$ oder $y^2 = bx$ ist. Die Gleichung (652.) giebt $ydy = 2a$ wovon die Stammgleichung $y^2 = 4ax + \text{Const.}$, und weil x und y zugleich Null sind, $y^2 = 4ax$ ist. Die beiden Gleichungen geben also, wenn das willkührliche b, $= 4a$ gesetzt wird, das Nämliche, und zwar die Gleichung

653. $y^2 = 4ax$

die mit der Gleichung der Parabel übereinkommt, weil der Parameter der Parabel, der vierfachen Entfernung a des Brennpunkts vom Scheitel gleich ist. Also war die willkührliche Zertheilung wirklich erlaubt. Die einzelnen Theile der Gleichung geben das Nämliche, was die ganze Gleichung giebt, und folglich das was man sucht.

345.

Einen andern Fall giebt die Ellipse. Bekanntlich hat sie die Eigenschaft, daß, wenn man einem Spiegel ihre Krümme

giebt, alle Strahlen aus dem einen Brennpunkt, von der Krümme, in den andern Brennpunkt zurückgeworfen werden.

Fig. 28. Die beiden Brennpunkte der Ellipse sollen B und C sein. M sei ein beliebiger Punkt der Curve, so wird der Strahl BM nach MC zurückgeworfen. Also ist der Winkel EMB gleich dem Winkel CMF, das heißt, man erhält den Winkel BMC $= \gamma - \beta$, wenn man den doppelten Winkel EMB oder $2(a + \beta)$ von zwei rechten abzieht. Also ist

654. $2\varrho - 2(\alpha + \beta) = \gamma - \beta$.

Daraus folgt $2(\varrho - 2\alpha) = \gamma + \beta$ und folglich

655. $-\operatorname{tang} 2\alpha = \operatorname{tang}(\gamma + \beta)$.

Nun ist $\frac{EP}{MP} = \frac{1}{dy}$, also

656. $-\operatorname{tang}\alpha = -\frac{1}{dy}$.

Ferner ist, wenn der Anfangspunkt der Abcissen A, mitten zwischen den beiden Brennpunkten A und C angenommen wird, $BP = x - c$ und $CP = x + c$. Sodann ist

$\operatorname{tang}\beta = \frac{BP}{MP}$, also

657. $\operatorname{tang}\beta = \frac{c - x}{y}$

und $\operatorname{tang}\gamma = \frac{CP}{MP}$, also

658. $\operatorname{tang}\gamma = \frac{x + c}{y}$.

Aus (655.) folgt

659. $\frac{2\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}\alpha^2 - 1} = \frac{\operatorname{tang}\beta + \operatorname{tang}\gamma}{1 - \operatorname{tang}\beta\operatorname{tang}\gamma}$.

Setzt man hierin die Werthe von $\operatorname{tang}\alpha$, $\operatorname{tang}\beta$ und $\operatorname{tang}\gamma$ aus (656. 657. 658.), so erhält man die Gleichung

$$\frac{-2\frac{1}{dy}}{\frac{1}{dy^2} - 1} = \frac{\frac{x - c}{y} + \frac{x + c}{y}}{1 - \frac{x^2 - c^2}{y^2}} \text{ oder}$$

$$\frac{dy}{dy^2 - 1} = \frac{xy}{y^2 - x^2 + c^2} \text{ oder}$$

660. $y^2 dy - x^2 dy + c^2 dy = xy dy^2 - xy.$

346.

Die Stammgleichung von dieser Ableitungsgleichung muß nothwendig die Gleichung der Ellipse sein, denn sie ist die Gleichung zwischen den Coordinaten x und y.

Die Zerlegung geschieht hier auf die Weise, daß man der Gleichung (660.) die Gestalt

$$y^2 dy - x^2 dy + c^2 dy - x^2 dy. m^2 - x^2 dy m^2 = xy dy^2 - xy,$$

oder

661. $(y^2 + c^2) dy - x^2 dy (1 - m^2) - x^2 dy m^2 = xy dy^2 - xy.$

giebt, wo m eine näher zu bestimmende Größe ist, und dann willkührlich den Theil

662. $- x^2 dy m^2 = xy dy^2$, und den Rest

663. $(y^2 + c^2) dy - x^2 dy (1 - m^2) = - xy$

setzt, denn beide Gleichungen geben einerlei Verhältniß zwischen x und y.

Die Gleichung (662.) nämlich giebt $- xm^2 = ydy$, also, wenn man sie zurückleitet, $\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2m^2 + \text{Const.}$, oder $y^2 = - x^2m^2 + \text{Const.}$ Also da $y = b$ für $x = o$ ist, $b^2 = o + \text{Const.}$ und folglich

$$y^2 = b^2 - x^2m^2.$$

Setzt man den noch unbekannten Werth von x, der für $y = o$ Statt findet, $= a$, so ist $o = b^2 - m^2a^2$, also $m^2 = \frac{b^2}{a^2}$, und folglich

664. $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2).$

Aus der andern Gleichung (663.) durch Zurückleitung einen ähnlichen Ausdruck zu entwickeln würde schwieriger sein. Man kann aber rückwärts sehen, daß die Gleichung (664.), mit einem passenden Werth von a, der Gleichung (663.) genug thut. Denn (664.) giebt $ydy = - \frac{b^2}{x^2} x.$ Man multiplicire die Gleichung (663.) mit y, so geht solche in

$$y^2 - ydy + c^2ydy - x^2ydy + \frac{b^2}{a^2} x^2ydy = - xy^2$$

über. Man setze hierin den Werth von $y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2$ und von $ydy, = - \frac{b^2}{a^2} x$, so erhält man

$$- \left(b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2\right) \frac{b^2}{a^2} x - c^2 . \frac{b^2}{a^2} x + \frac{b^2}{a^2} x^3 - \frac{b^4}{a^4} x^3 =$$
$$- b^2 x + \frac{b^2}{a^2} x^3 \text{ oder}$$

$$b^2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) - c^2 . \frac{b^2}{a^2} = 0, \text{ oder}$$

665. $a^2 - b^2 = c^2$ oder $a^2 = b^2 + c^2$.

Es ist also bloß nöthig, daß a den Werth $\sqrt{(b^2 + c^2)}$ habe, so giebt die Gleichung (663.) genau das nämliche Verhältniß zwischen x und y, wie (662.), und folglich alsdann auch dasjenige Verhältniß, welches die gegebene Gleichung (660.) erfordert, mithin das wahre gesuchte Verhältniß zwischen x und y. Da nun a noch unbekannt oder unbestimmt war, so kann die Bedingung $a^2 = b^2 + c^2$ erfüllt werden, und folglich drückt die Gleichung

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) \quad (664.)$$

wirklich das gesuchte Verhältniß zwischen x und y aus. In der That ist sie die bekannte Gleichung der Ellipse für Coordinaten aus dem Mittelpunkt, und daher die Aufgabe auch hier, durch die Zurückleitung mittelst Zertheilung, wirklich richtig gelöset.

347.

Die Bedingungen für diese Art der Zertheilung lassen sich folgendergestalt ausdrücken:

Es sei die Ableitungs-Gleichung zweiter Ordnung zwischen der unabhängig veränderlichen Größe x und der davon abhängenden Größe y:

666. $p + Qdy + sdy^2 = 0$

gegeben, wo p, Q und s nach Belieben x und y enthalten können; so zerlege man x in zwei Theile q und r, so daß

667. $Q = q + r$ und folglich

$$p + qdy + rdy + sdy^2 = o \text{ ist.}$$

Nun setze man willkührlich

668. $\begin{cases} p + qdy = o \text{ und} \\ rdy + sdy^2 = o, \end{cases}$

woraus folgt,

669. $\begin{cases} p = - qdy \text{ und} \\ r = - sdy. \end{cases}$

Geben diese Gleichungen, zurückgeleitet, einerlei Verhältniß zwischen x und y, so war die Zerlegung erlaubt, und was sie geben ist das nämliche Verhältniß, welches auch die ganze gegebene Gleichung (654.) giebt, und folglich das gesuchte.

Aus (657.) folgt auch $\frac{p}{r} = \frac{q}{s}$ oder

670. $ps = qr$,

welches ebenfalls eine Gleichung zwischen x und y ist, die sogar nicht erst zurückgeleitet werden darf.

Es kommt also nur auf eine solche Zerlegung von Q an, daß $p = - qdy$ und $r = - sdy$ einerlei Verhältniß zwischen x und y geben. Das nämliche Verhältniß muß dann auch nothwendig die Gleichung (658.) $ps = qr$ geben.

348.

In den beiden obigen Beispielen war für die Parabel

$$ydy^2 - 2ady + 2xdy - y = o \ (649.)$$

und für die Ellipse

$$xydy^2 - y^2dy + x^2dy - c^2dy - xy = o \ (660.)$$

Für den ersten Fall war (651. und 652. mit 668. verglichen.)

$$p = - y, \ q = 2x, \ r = - 2a, \ s = y;$$

also giebt für diesen Fall die Bedingungs-Gleichung $ps = qr$ (670.) $- y^2 = - 4ax$ oder $y^2 = 4ax$, und dies kommt in der That mit dem was aus den beiden Theilen der gegebenen Ableitungs-Gleichung, und folglich aus der ganzen Ab-

leitungs-Gleichung folgt, und das Resultat der Auflösung ist (653.) überein.

Für den zweiten Fall ist (662. und 663. mit 668. verglichen.)

$$p = xy, \ q = y^2 + c^2 - x^2 (1 - m^2)$$
$$r = m^2x^2, \ s = xy;$$

also giebt für diesen zweiten Fall die Bedingungs-Gleichung $ps = qr$ (670.)

$$x^2y^2 = m^2x^2 (y^2 + c^2 - x^2 + m^2x^2) \text{ oder}$$
$$y^2 (1 - m^2) = m^2c^2 - m^2 (1 - m^2)x^2.$$

Setzt man hierin die Werthe von c und m, nämlich $c^2 = a^2 - b^2$ und $m^2 = \frac{b^2}{a^2}$, so erhält man

$$y^2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = (a^2 - b^2 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) x^2) \frac{b^2}{a^2} \text{ oder}$$

$$y^2 = (a^2 - x^2) \frac{b^2}{a^2}$$

welches ebenfalls mit dem Resultat der Auflösung (664.) übereinstimmt.

349.

Wahrscheinlich läßt sich eine solche Zerlegung noch allgemeiner ausüben. Nämlich wenn eine Gleichung

$$U = 0$$

zwischen x und y und den Ableitungen von y nach x bis zu einer beliebigen Ordnung, gegeben wäre, so müßte man versuchen, U in mehrere andere Größen u, v, w... zu zerlegen, die, jede gleich Null gesetzt, durch Multiplication oder Addition, oder wie es sonst sein mag, verbunden, $U = 0$ geben, und von der Art sind, daß die Gleichungen $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$... wenn man sie zurückleitet, alle einerlei Verhältniß zwischen x und y ausdrücken. Hätte man solche Größen u, v, w... gefunden, so müßte das Verhältniß, welches sie zwischen x und y geben, das nämliche sein, welches die Gleichung $u = 0$ selbst giebt, und folglich das gesuchte.

Durch ein solches Verfahren, wenn es möglich ist, würde

die Zurückleitung der Ableitungs-Gleichungen höherer Ordnung gleichsam auf eine eigenthümliche Art von Gleichungs-Auflösung gebracht werden.

Der Gegenstand schien mir der Bemerkung werth, um vielleicht Jemanden, der mehr Zeit hat, als ich, zum weitern Nachdenken darüber zu veranlassen.

II. Von der Zurückleitung durch algebraische Auflösungen.

350.

Ein anderer merkwürdiger Fall, in welchem sich die Zurückleitung einer Ableitungs-Gleichung auf algebraische Auflösung bringen zu lassen scheint, ist folgender:

Ich bin darauf gekommen als ich die Curve suchte, von deren sämmtlichen Tangenten, zwei, unter einem beliebigen unveränderlichen Winkel zusammenstoßende grade Linien, gleich lange Stücke abschneiden.

Fig. 29. Die Aufgabe nämlich ist, die Curve EMP zu finden, deren sämmtliche Tangenten ED, GF, FC ꝛc., so weit sie zwischen den festen Linien AE und AC liegen, gleich lang sind.

Es ist im Dreieck AGF, $\frac{\sin(\alpha + \varphi)}{b + k} = \frac{\sin \alpha}{a}$ also $a(\sin\alpha \cos\varphi + \cos\alpha \sin\varphi) = (b + k)\sin\alpha$ oder $a(\cos\varphi + \sin\varphi \cot\alpha) = b + k$.

Nun ist $b \tang \alpha = a$, also $\cos\alpha = \frac{b}{a}$, folglich

$$a\left(\cos\varphi + \sin\varphi . \frac{b}{a}\right) = b + k \text{ oder}$$

671. $a\cos\varphi + b\sin\varphi = b + k.$

Es ist ferner $(b + k - x)\tang\varphi = y$ also aus (671.)

672. $(a\cos\varphi + b\sin\varphi - x)\tang\varphi = y.$

Desgleichen ist

673. $\tang\varphi = -dy,\ \sin\varphi = -\frac{dy}{ds},\ \cos\varphi = \frac{1}{ds},$

wenn

wenn die Länge des Curven-Bogens MP $= s$ ist; also ist in (672.)

$$-\left(\frac{a}{ds} - \frac{b\,dy}{ds} - x\right) dy = y, \text{ oder}$$

$$a\,dy + b\,dy^2 + x\,ds\,dy - y\,ds = 0, \text{ oder}$$

674. $(y - x\,dy)\,ds = (b\,dy + a)\,dy.$

Da $ds = \sqrt{(1 + dy^2)}$, so erhält man

$(y^2 - 2xydy + x^2dy^2)(1 + dy^2) = b^2dy^2 + 2abdy + a^2)dy^2,$ oder

$y^2 - 2xydy + x^2dy^2 + y^2dy^2 - 2xydy^3 + x^2dy^4 = b^2dy^4$
$+ 2abdy^3 + a^2dy^2$, oder

675. $(x^2 - b^2)\,dy^4 - 2\,(xy + ab)\,dy^3 + (x^2 + y^2 - a^2)\,dy^2$
$- 2xydy + y^2 = 0.$

Diese Ableitungs-Gleichung bestimmt das Verhältniß zwischen x und y, und folglich die gesuchte Gleichung der Curve.

Betrachtet man dy als die unbekannte Größe, so müßte man, um es auszudrücken, eine Gleichung der vierten Ordnung auflösen. Die Auflösung würde dy in x und y geben. Dann bliebe noch die Zurückleitung übrig.

351.

Ein anderer Weg der Auflösung ist nun folgender:

Die Coordinaten der Linie GF, von A ab, sollen u und v heißen, so ist zufolge (672.)

676. $v = (b + k - u)\tan\varphi$

und zufolge (671.)

677. $a\cos\varphi + b\sin\varphi = b + k = c,$

wenn $AF = b + k = c$ heißt.

Aus (677.) folgt

$$a + b\tan\varphi = c\sec.\varphi, \text{ oder}$$

$$a^2 + 2ab\tan + b^2\tan\varphi^2 = c^2(1 + \tan\varphi^2), \text{ also}$$

$\tan\varphi^2(c^2 - b^2) - 2ab\tan\varphi + c^2 - a^2 = 0$, und

$$\tan\varphi = \frac{ab \pm \sqrt{[a^2b^2 - (c^2 - a^2)(c^2 - b^2)]}}{c^2 - b^2}.$$

Die Wurzelgröße ist $a^2b^2 - c^4 + c^2b^2 + a^2c^2 - a^2b^2$ $= c^2(a^2 + b^2 - c^2)$, also ist

678. $\tan\varphi = \frac{ab \pm c\sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)}}{c^2 - b^2}$.

Dieses in (676.) gesetzt giebt

679. $v = (c - u) . \frac{ab \pm c\sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)}}{c^2 - b^2}$.

Nun sei für irgend eine andere Lage CF der constanten Linie DE, die Größe AC = mc, so haben für den Durchschnitts-Punkt m, der beiden Linien IC und GF, u und v einerlei Werth, und für die Linie IC geht c in mc über. Also ist für IC

680. $v = (mc - u) . \frac{ab \pm mc\sqrt{(a^2 + b^2 - m^2c^2)}}{m^2c^2 - b^2}$.

Man setze der Kürze wegen

681. $\begin{cases} abmc - \sqrt{(a^2 + b^2 - m^2c^2)} = P \\ ab - c\sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)} = Q \\ m^2c^2 - b^2 = p \\ c^2 - b^2 = q, \end{cases}$

so ist

$$v = (c - u)\frac{Q}{q} \text{ und } v = (mc - u)\frac{P}{p}.$$

Beide Werthe von v gleich gesetzt, giebt

$$(c - u)\frac{Q}{q} = (mc - u)\frac{P}{p}, \text{ oder}$$

$$(c - u)\,Qp = (mc - u)\,Pq \text{ und daraus}$$

$$u(Pq - Qp) = c(mPq - Qp), \text{ also}$$

682. $u = c . \frac{mPq - Qp}{Pq - Qp}$.

Setzt man dieses u z. B. in $v = (c - u)\frac{Q}{p}$, so erhält man

$$v = c\left(1 - \frac{mPq - Qp}{Pq - Qp}\right) . \frac{Q}{q}$$

oder

683. $v = c\,\frac{Pp\,(1 - m)}{Pq - Qp} . \frac{Q}{q}$

woraus sich die Coordinaten des Durchschnitts-Punkts M der beiden Linien IC und GF finden.

352.

Setzt man $m = 1$, so fällt der Durchschnitts-Punkt M in die Curve, denn der Durchschnitts-Punkt zweier unmittelbar auf einander folgenden Tangenten ist ein Curven-Punkt. Da aber, wie leicht zu sehen, die Werthe von u und v für diesen Fall in $\frac{0}{0}$ übergehen, indem $P = Q$ und $p = q$ wird, so muß man, um u und v für den Fall $m = 1$ zu finden, von Zähler und Nenner der Brüche, die u und v ausdrücken, die ersten Ableitungen nach m nehmen.

Dieses giebt, weil Q und q kein m enthalten und also dQ und $dq = 0$ sind,

$$684. \quad u = c \cdot \frac{Pq + mqdP - Qdp}{qdP - Qdp}$$

Nun ist aus (681.), wenn man

$$685. \begin{cases} \sqrt{(a^2 + b^2 - m^2c^2)} = R \text{ und} \\ \sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)} = r \end{cases} \text{setzt.}$$

$$dP = -cR + \frac{m^2c^3}{R},$$

$$dP = 2mc^2, \text{ also}$$

$$u = c\,\frac{(ab - mcR)q + mq(-cR + \frac{m^2c^2}{R}) - (ab - cr).2mc^2}{q(-cR + \frac{m^2c^3}{R}) - (ab - cr).2mc^2}$$

oder

$$u = \frac{(abR - mcR^2)q - mqcR^2 + m^3c^3q - 2mc^2abR + 2mc^3r^2R}{-qR^2 + m^2c^2q - 2abcmR + 2mc^2rR}$$

Hierin kann man nun $m = 1$ setzen. Für $m = 1$ aber ist $R = r$, also

$$u = \frac{abqr - cqr^2 - cqr^2 + c^3q - 2c^2abr + 2c^3r^2}{-qr^2 + qc^2 - 2abcr + 2c^2r^2}, \text{ oder}$$

$$u = \frac{2rc^2(c^2 - q) + abr(q - 2c^2) + c^3q}{+qc^2 - qr^2 + 2c^2r^2 - 2abcr} \text{ oder}$$

$$u = \frac{2c(a^2 + b^2 - c^2)b^2 - c^3(b^2 - c^2) - ab(c^2 + b^2)\sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)}}{(a^2 + b^2 - c^2)b^2 + a^2c^2 - 2abc\sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)}}$$

oder

$$685.\quad u = \frac{2c(a^2+b^2-c^2)b^2 - c^3(b^2-c^2) - ab(c^2+b^2)\sqrt{(a^2+b^2-c^2)}}{[ac - b\sqrt{(a^2+b^2-c^2)}]^2}$$

Ferner erhält man

$$c - u = \frac{\begin{array}{l} c(a^2+b^2-c^2)b^2 + a^2c^3 - 2abc^2\sqrt{(a^2+b^2-c^2)} \\ -2c(a^2+b^2-c^2)b^2 + b^2c^3 - c^5 + ab(c^2+b^2)\sqrt{(a^2+b^2-c^2)} \end{array}}{[ac - b\sqrt{(a^2+b^2-c^2)}]^2}$$

oder

$$c - u = \frac{c(a^2+b^2-c^2)(c^2-b^2) + ab(b^2-c^2)\sqrt{(a^2+b^2-c^2)}}{[ac - b\sqrt{(a^2+b^2-c^2)}]^2}$$

also in (679.)

$$v = \frac{[c(a^2+b^2-c^2) - ab\sqrt{(a^2+b^2-c^2)}](ab - c\sqrt{(a^2+b^2-c^2)})}{[ac - b\sqrt{(a^2+b^2-c^2)}]^2}$$

oder

$$686.\quad v = -\left[\frac{ab - c\sqrt{(a^2+b^2-c^2)}}{ac - b\sqrt{(a^2+b^2-c^2)}}\right]^2 \sqrt{(a^2+b^2-c^2)}$$

353.

v und u sind die Coordinaten der Curve, also mit x und y einerlei. Es sind also beide Coordinaten x und y durch die Länge a der constanten, die Curve beschreibenden Linie ED, durch b, die Entfernung des Orts D, wo diese Linie, als Perpendikel, auf den einen Schenkel hinfällt, vom Winkel-Scheitel A, und durch die Entfernung c des Orts z. B. F, vom Scheitel A, in welchem eine beliebige Tangente der Curve den einen Schenkel schneidet, ausgedrückt worden.

Entwickelte man daher aus den beiden Ausdrücken von x und y die unbestimmte Größe c, so würde man dafür zwei Ausdrücke, den einen in a, b und x den andern in a, b und y erhalten. Setzte man also diese Ausdrücke von c einander gleich, so würde eine Gleichung zwischen a, b, x und y entstehen, also zwischen den Coordinaten der Curve und den beiden constanten Größen a und b. Diese Gleichung wäre also wirklich die gesuchte Gleichung der Curve.

354.

Mit dieser Gleichung muß nothwendig die Stammgleichung der abgeleiteten (675.) übereinstimmen, denn auch die Stammgleichung dieser abgeleiteten Gleichung enthält nur x, y, a und b. Also ist durch die letztere Art der Auflösung die Zurückleitung der Ableitungs-Gleichung (675.) auf eine algebraische Auflösung von Gleichungen gebracht worden, nämlich auf diejenige, welche hier nöthig ist, um aus (685. und 686.) c zu finden.

Könnte man also eine gegebene Ableitungs-Gleichung, von welcher die Stammgleichung gefunden werden soll, auf eine ähnliche Art in eine andere verwandeln, bei welcher es nur auf die algebraische Auflösung von Gleichungen ankömmt, so würde dadurch die Zurückleitungs-Operation in eine bloß algebraische verwandelt werden, und folglich die Verwandlung, weil die algebraische Auflösung, wenigstens für bestimmte Zahlen-Werthe der Coefficienten durch Näherung mancherlei Art allemal möglich ist, wenigstens in besonderen Fällen nützlich seyn.

Man sieht aus den obigen beiden Beispielen, daß wahrscheinlich noch manche Zurückleitung von Ableitungs-Gleichungen durch einzelne Kunstgriffe möglich ist.

14.

Einige Beispiele von größten und kleinsten Werthen von Ausdrücken mit mehreren, zum Theil von einander abhängigen, unbestimmten Größen.

355.

Es ist bekannt, daß man, von einem Ausdrucke mit mehreren unbestimmten oder veränderlichen Größen, den größten oder kleinsten Werth findet, wenn man seinen veränderlichen Größen diejenigen Werthe giebt, die gefunden werden, wenn man die ersten theilweisen Ableitungen des Ausdrucks, nach den verschiedenen Elementen genommen, einzeln gleich Null setzt. Zum Beispiel wenn

687. $M = f(u, x, y, z\ldots)$

wäre, so würde man von M den größten oder kleinsten Werth finden, wenn man den Elementen u, x, y, z... diejenigen Werthe gäbe, die aus den Gleichungen $\frac{d}{u} M = 0$, $\frac{d}{x} M = 0$, $\frac{d}{y} M = 0$, $\frac{d}{z} M = 0$ 2c. folgen. Ob dergleichen Werthe von u, x, y, z... einen größten oder kleinsten Werth von M geben, oder ob überhaupt ein größter oder kleinster Werth von M möglich ist, zeigt sich aus der Beschaffenheit der zweiten theilweisen Ableitungen von M, welches man unter andern im 11 ten Capitel der Theorie des fonctions von Lagrange abgehandelt findet. Hier ist diesmal von dem letztern nicht die Rede, sondern nur von Beispielen der Entwickelung der Werthe der Elemente u, x, y, z... aus den ersten theil-

weisen Ableitungs-Gleichungen von M, in der Voraus-setzung, daß größte und kleinste Werthe von M möglich sind, und daß schon entschieden worden, ob die Werthe von M größte oder kleinste sind, und zwar in dem Falle, wenn die Elemente u, x... nicht gänzlich von einander unabhängig sind.

356.

Wäre nichts weiter bestimmt, als daß die, in gegebener Form aus u, x, y, z... zusammengesetzte Größe M ein Größtes oder Kleinstes sein soll, so wären u, x, y, z... gänzlich von einander unabhängig, und die Verhältnisse zu einander würden erst, und lediglich dadurch bestimmt, daß in der vorgeschriebenen Zusammensetzung derselben, der Werth von M so groß oder so klein sein soll als möglich. Man hätte in diesem Fall nichts weiter zu thun, als aus den ersten theilweisen Ableitungs-Gleichungen von M: $\frac{d}{u}M = o$, $\frac{d}{x}M = o \ldots$, u, x ꝛc. durch gewöhnliche algebraische Mittel zu entwickeln. Die auf diese Weise gefundenen bestimmten Werthe von u, x... würden den Werth von M so groß oder so klein machen als möglich, je nachdem es die Natur der Aufgabe zuläßt, oder bestimmt.

Anders verhält es sich, wenn die Elemente u, x, y, z... nicht gänzlich von einander unabhängig, sondern eine oder mehrere Gleichungen gegeben sind, die im Voraus, für alle Werthe der Elemente, also auch für diejenigen, die dem größten oder kleinsten Werth von M zukommen, gewisse Verhältnisse festsetzen; zum Beispiel, wenn die Aufgabe so lautete: M = f (u, x, y, z...) soll so groß oder so klein als möglich sein, zugleich aber sollen zwischen u, x, y, z... die Bedingungs-Gleichungen

$$688. \left\{ \begin{array}{l} A = \overset{1}{\varphi}(u, x, y, z \ldots) = o \\ B = \overset{2}{\varphi}(u, x, y, z \ldots) = o \\ C = \overset{3}{\varphi}(u, x, y, z \ldots) = o \end{array} \right.$$

Statt finden. In diesem Falle können die ersten Ableitungen

$\frac{d}{u}$ M, $\frac{d}{x}$ M ꝛc. nicht mehr einzeln gleich Null gesetzt werden, denn dazu ist, wie aus der Theorie der Maxima und Minima bekannt, wesentlich nothwendig, daß die Größen u, x, y, z... gar nicht von einander abhängen.

357.

Es kommt also in einem solchen Fall einer theilweisen Abhängigkeit der Elemente u, x, y, z.... darauf an, die bestimmte Abhängigkeit in Rechnung zu bringen, und in den Ausdruck M = f (u, x, y, z...), der ein Größtes oder Kleinstes sein soll, einzuführen.

Das nächste Mittel dazu wäre, daß man aus den gegebenen Bedingungs-Gleichungen (688.) A = o, B = o, C = o ꝛc. so viele Größen u, x, y... als möglich zu entwickeln, und aus dem gegebenen Ausdruck M, der ein Größtes oder Kleinstes sein soll, durch Substitution der entwickelten Werthe, wegzuschaffen suchte. Es ist leicht zu sehen, daß wenn die Zahl, der in der Größe M befindlichen Elemente, u, x, y..., n, und die Zahl der Bedingungs-Gleichungen A = o, B = o ꝛc., m ist, m nicht größer als n — 1 sein kann, weil sonst alle Größen u, x... bestimmte Werthe erhalten und folglich gar nicht mehr unbestimmt oder veränderlich sein würden. Sind also m Bedingungs-Gleichungen gegeben und n Größen in M befindlich, wo m höchstens = n — 1 sein kann, so kann man die Zahl der Elemente in M bis auf n — m reduciren. Die übrig bleibenden n — m Elemente, zwischen welchen nun keine Bedingungs-Gleichungen mehr Statt finden, sind dann gänzlich von einander unabhängig, und die Größe M mit diesen n — m Elementen kann nun ganz so behandelt werden, als wenn gar keine Bedingungs-Gleichungen vorhanden, oder als wenn die Elemente gänzlich von einander unabhängig wären, also so, wie im Anfange von (356.) gedacht.

358.

Dieses Mittel, die gegebenen Bedingungs-Gleichungen A = o, B = o ꝛc, zu berücksichtigen, oder die vorgeschrie-

bene theilweise Abhängigkeit der Größen u, x, y... gegen einander, in Betracht zu ziehen, ist zwar das nächste was sich darbietet, allein es kann in der Ausführung bald große Schwierigkeiten finden, weil algebraische Auflösungen von Gleichungen nöthig sind, um zwischen den m Bedingungs-Gleichungen $A = o$, $B = o$ ꝛc., m Elemente wegzuschaffen. Uebersteigt die Ordnung der vorkommenden Gleichungen den vierten Grad, so ist die Auflösung mit den jetzigen Kräften der Algebra sogar unmöglich. Es ist also eine andere Art der Auflösung zu wünschen, und in der That ist es möglich, die gegebene theilweise Abhängigkeit der Elemente, in jedem Fall, die Bedingungs-Gleichungen mögen noch so hoch steigen, in die Größe $M = o$ wirklich einzuführen. Die Schwierigkeit der algebraischen Auflösung höherer Gleichungen kann hier, wenigstens bis zur Bestimmung der, dem größten und kleinsten Werthe von M zukommenden Werthe der Elemente selbst, umgangen und bis auf die unmittelbare Entwickelung dieser Werthe verschoben werden, wo sie dann häufig geringer ist. Der Fall ist einer von denen, wo man einer analytischen Schwierigkeit, die sich in den Weg zu stellen scheint, ausweichen kann. Er ist in diesem Betracht merkwürdig.

Aber er ist es noch mehr durch die Art des Kunstgriffs, der diesen Dienst leistet. Der Kunstgriff ist der nämliche, welcher in der Variations-Rechnung zu einem ähnlichen Zwecke angewandt wird, nämlich um eine vorher bestimmte theilweise Abhängigkeit zwischen veränderlichen Größen in Rechnung zu bringen. Er besteht darin, daß man die gegebenen Bedingungs-Gleichungen $A = o$, $B = o$, $C = o$ ꝛc. jede mit einer unbestimmten willkührlichen Größe, z. B. λ, μ, ν ꝛc. multipliciret, und die so veränderten Bedingungs-Gleichungen zu der gegebenen Größe M, welche den möglichst größten oder kleinsten Werth erhalten soll, addirt. Da die Größen λA, μB, νC ꝛc. eben sowohl $= o$ sind, als A, B, C ꝛc. selbst, so geht dies allemal an, denn durch Hinzuthun von Nullen wird an dem Werthe von M nichts geändert. Man gewinnt aber dadurch den wesentlichen Vortheil, daß nunmehr die Größe

689. $M + \lambda A + \mu B + \nu C \ldots$

so behandelt werden kann, als wären gar keine Bedingungs-Gleichungen zwischen u, x, y... mehr vorhanden; denn was diese geben, ist jetzt bei der neuen Größe wirklich schon berücksichtigt. Man hat zwar jetzt allerdings m unbestimmte Größen mehr, nämlich noch die neuen Größen λ, μ, ν... die jetzt eben sowohl nach der Natur der Aufgabe bestimmt werden müssen, als u, x, y, z..., aber man hat auch m Gleichungen mehr, aus welchen solches geschehen kann; nämlich: n Ableitungs-Gleichungen

$$\frac{d}{u}(M + \lambda A \ldots) = 0, \ \frac{d}{x}(M + \lambda A \ldots) = 0 \text{ rc.}$$

und m Bedingungs-Gleichungen A = 0, B = 0 rc., die nichts anders sind, als $\frac{d}{\lambda}(M + \lambda A \ldots)$ Die Ableitungs-Gleichungen, die allein λ, μ... enthalten, sind aber überdem, in Hinsicht auf diese Größen, allemal lineär. Die analytische Schwierigkeit ist also keinesweges an sich selbst vermehrt, wohl aber ist sie vor der Ableitungs-Operation umgangen und bis nach derselben verschoben worden, wo sie sich, weil die Resultate der Ableitungs-Operation gewöhnlich einfacher sind als die Stammgrößen, überdem vermindert.

Da die Anwendung dieses merkwürdigen analytischen Kunstgriffs, der auch wahrscheinlich noch in vielen andern Fällen nützlich ist, außer der Variations-Rechnung wenig vorkommt, so ist es vielleicht nicht uninteressant, einige Wirkungen desselben hier in diesem Fall an Beispielen zu sehen. Der Anwendung des Erleichterungs-Mittels findet man von Lagrange, am oben angezeigten Orte gedacht, aber der Gegenstand ist dort weiter grade durch keine Beispiele erläutert, weil solches außer dem Zwecke des Verfassers lag. Es sollen also hier einige Beispiele der Anwendung von Lagranges Theorie folgen.

359.

Zuvörderst ist zu bemerken, daß sich die Hülfsgrößen λ, μ..., mit welchen man die Bedingungs-Gleichungen multiplicirt, weil solche, wie oben gesagt, nie anders als in der

ersten Potenz vorkommen, allgemein, ohne Rücksicht auf bestimmte Fälle, wegschaffen lassen. Durch die Anwendung derselben nämlich geht die allgemeine Aufgabe, von den n Größen $u, x, y, z \ldots$, mit Rücksicht auf die gegebenen m Bedingungs-Gleichungen zwischen denselben, $A = 0$, $B = 0 \ldots$ diejenigen Werthe zu finden, die den Werth des Ausdrucks $M = f(u, x, y, z \ldots)$ so groß oder so klein machen als möglich, in die andere Aufgabe über: von den $m + n$ Größen $u, x, y \ldots \lambda, \mu \ldots$ diejenigen Werthe zu finden, die den Werth des Ausdrucks $M' = M + \lambda A + \mu B \ldots$ zum Maximo oder Minimo machen.

Da bei dieser zweiten Aufgabe die $m + n$ Größen $u, x, y \ldots \lambda, \mu \ldots$ gänzlich von einander unabhängig sind, so läßt sich dieselbe auf die gewöhnliche Weise, als wenn gar keine Bedingungs-Gleichungen vorhanden wären, auflösen, nämlich dadurch, daß man die Werthe der $m + n$ Größen aus den $m + n$ Gleichungen $\frac{d}{u} M' = 0$, $\frac{d}{x} M' = 0$, $\frac{d}{y} M' = 0 \ldots \frac{d}{\lambda} M' = 0$, $\frac{d}{\mu} M' = 0 \ldots$ nimmt. Diese Gleichungen sind, vermöge des Ausdrucks $M' = M + \lambda A + \mu B \ldots$ folgende:

$$690. \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \frac{d}{u} M + \lambda \frac{d}{u} A + \mu \frac{d}{u} B \ldots = 0 \\ \frac{d}{x} M + \lambda \frac{d}{x} A + \mu \frac{d}{x} B \ldots = 0 \\ \frac{d}{y} M + \lambda \frac{d}{y} A + \mu \frac{d}{y} B \ldots = 0 \end{array} \right\} \text{n Gleichungen.} \\ \text{— — — — — — —} \\ \left. \begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \end{array} \right\} \text{m Gleichungen.} \end{array} \right.$$

Denn da M' weiter keine λ enthält, als in dem einzigen Gliede λA, kein μ weiter, als in dem einzigen Gliede μB u. s. w., so ist $\frac{d}{\lambda} M' = A$, $\frac{d}{\mu} M' = B$ u. s. w.

Die Elimination der Größen λ, μ... kann nun wie gewöhnlich zwischen Gleichungen erster Ordnung geschehen.

Es mag z. B. nur eine Bedingungs-Gleichung $A = o$ gegeben sein, so kommt auch nur eine Größe λ vor, und die ersten n Gleichungen (690.) geben folgende $n - 1$ Gleichungen:

$$691. \begin{cases} \frac{d}{u} M \frac{d}{x} A - \frac{d}{x} M \frac{d}{u} A = o \\ \frac{d}{u} M \frac{d}{y} A - \frac{d}{y} M \frac{d}{u} A = o \\ \frac{d}{u} M \frac{d}{z} A - \frac{d}{z} M \frac{d}{x} A = o \\ \text{— — — — — — —} \end{cases}$$

Dazu von den m Gleichungen (690.) hier die eine $A = o$, thut zusammen n Gleichungen, welche nur noch u, x, y... enthalten, und aus welchen sich also die n Größen u, x, y... vollständig bestimmen lassen.

Sind zwei Bedingungs-Gleichungen $A = o$ und $B = o$ gegeben, so kommen zwei Hülfsgrößen λ und μ vor, und die n Gleichungen (690.) geben zuerst folgende $n - 1$ Gleichungen, die von den beiden Hülfs-Größen λ und μ, nur noch μ enthalten, nämlich

$$\frac{d}{u} M \frac{d}{x} A - \frac{d}{x} M \frac{d}{u} A + \mu \frac{d}{u} B \frac{d}{x} A - \mu \frac{d}{x} B \frac{d}{u} A = o,$$

$$\frac{d}{u} M \frac{d}{y} A - \frac{d}{y} M \frac{d}{u} A + \mu \frac{d}{u} B \frac{d}{y} A - \mu \frac{d}{y} B \frac{d}{u} A = o,$$

$$\frac{d}{u} M \frac{d}{z} A - \frac{d}{z} M \frac{d}{u} A + \mu \frac{d}{u} B \frac{d}{z} A - \mu \frac{d}{z} B \frac{d}{u} A = o,$$

— — — — — — —

und darauf ferner folgende $n = 2$ Gleichungen, die weder λ noch μ mehr enthalten:

$$\left(\frac{d}{u} M \frac{d}{x} A - \frac{d}{x} M \frac{d}{u} A\right)\left(\frac{d}{u} B \frac{d}{y} A - \frac{d}{y} B \frac{d}{u} A\right)$$

$$-\left(\frac{d}{u} M \frac{d}{y} A - \frac{d}{y} M \frac{d}{u} A\right)\left(\frac{d}{u} B \frac{d}{x} A - \frac{d}{x} B \frac{d}{u} A\right) = o \text{ oder}$$

$$692.\left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{u}A\left(\frac{d}{x}M\frac{d}{y}B-\frac{d}{y}M\frac{d}{x}B\right)\\
&-\frac{d}{u}B\left(\frac{d}{x}M\frac{d}{y}A-\frac{d}{y}M\frac{d}{x}A\right)\\
&-\frac{d}{u}M\left(\frac{d}{x}A\frac{d}{y}B-\frac{d}{y}A\frac{d}{x}B\right)=0 \text{ und}\\
&\frac{d}{u}A\left(\frac{d}{x}M\frac{d}{z}B-\frac{d}{z}M\frac{d}{x}B\right)\\
&-\frac{d}{u}B\left(\frac{d}{x}M\frac{d}{z}A-\frac{d}{z}M\frac{d}{x}A\right)\\
&-\frac{d}{u}M\left(\frac{d}{x}A\frac{d}{z}B-\frac{d}{z}A\frac{d}{x}B\right)=0.\\
&-\;-\;-\;-\;-\;-
\end{aligned}\right.$$

Dazu die 2 Gleichungen $A=0$ und $B=0$ thut n Gleichungen, welche nur noch $u, x, y\ldots$ enthalten, und aus welchen sich also die n Größen $u, x, y\ldots$ wieder vollständig bestimmen lassen u. s. w.

Da diese Elimination gar nicht von der Zahl der gegebenen Elemente $u, x, y\ldots$, sondern bloß von der Zahl der Bedingungs-Gleichungen $A=0$, $B=0\ldots$, oder der Größen $\lambda, \mu\ldots$ abhängt, für jede beliebige Zahl derselben aber allemal möglich ist, so ist sie allgemein ausführbar, und es lassen sich also immer, durch die Anwendung der Hülfsgrößen $\lambda, \mu, \nu\ldots$, n Gleichungen, wie z. B. (691. und 692.), aufstellen, welche nur noch die gegebenen n Elemente $u, x, y\ldots$ enthalten, und folglich zur Auflösung der Aufgabe vollständig zureichen.

360.

Erstes Beispiel. Die Seiten eines Dreiecks von gegebenem Umfange zu finden, wenn der Inhalt des Dreiecks ein Maximum ist.

Der gegebene Umfang sei a. Die unbekannten Seiten sollen u, x, y heißen, so ist der Inhalt des Dreiecks bekanntlich $\sqrt{[(\frac{1}{2}a-u)(\frac{1}{2}a-x)(\frac{1}{2}a-y).\frac{1}{2}a.]}$ Diese Größe,

oder $(a - 2u)(a - 2x)(a - 2y)$ soll also ein Maximum sein, folglich ist hier

$$M = (a - 2u)(a - 2x)(a - 2y),$$

die eine gegebene Bedingungs-Gleichung ist

$$A = u + x + y - a = 0;$$

also ist

$$\frac{d}{u} M = -2(a - 2x)(a - 2y),$$

$$\frac{d}{x} M = -2(a - 2u)(a - 2y),$$

$$\frac{d}{y} M = -2(a - 2u)(a - 2x),$$

$$\frac{d}{u} A = 1, \quad \frac{d}{x} A = 1, \quad \frac{d}{y} A = 1,$$

folglich nach den Gleichungen (691.)

$$-2(a - 2x)(a - 2y) + 2(a - 2u)(a - 2y) = 0$$

$$-2(a - 2x)(a - 2y) + 2(a - 2u)(a - 2x) = 0$$

woraus folgt $a - 2x = a - 2u$ und $a - 2y = a - 2u$, also

693. $u = x = y = \frac{1}{3} a,$

das heißt das Dreieck muß gleichseitig sein, wie bekannt.

361.

Es ist zu bemerken, daß in allen Fällen, wo die Elemente $u, x, y \ldots$ in dem Ausdruck M und in den Bedingungs-Gleichungen gleichartig, das heißt, so vorkommen, daß sie verwechselt werden können, ohne daß die Ausdrücke aufhörten für die Aufgabe zu passen, wie es in dem vorigen Beispiel der Fall war; daß man dann nothwendig finden muß, daß die Größen $u, x, y \ldots$ für das Maximum oder Minimum einander gleich sind. Denn was auch die Rechnung geben mag, immer paßt der Ausdruck einer Größe auch für alle übrige, weil die Größen verwechselt werden können, und folglich sind alle Größen einander gleich.

In diese Categorie gehört eine große Menge von Aufgaben. Hätte man z. B. oben, statt der Seiten die Winkel gesucht, so wären die Grund-Ausdrücke gewesen

$$M = ux \sin(ux) \text{ und } A = u + x + y - a = o.$$

Würde verlangt, daß die Summe der Sinus, oder Cosinus, oder der Tangenten ꝛc. der drei Winkel α, β, γ eines Dreiecks ein Maximum sein soll, so wären die Grund-Ausdrücke z. B.

$$M = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \text{ und } A = \alpha + \beta + \gamma - 2\varrho = o.$$

Sollte das Produkt der trigonometrischen Linien der drei Winkel ein Maximum sein, so wäre z. B.

$$M = \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \text{ und } A = \alpha + \beta + \gamma - 2\varrho = o$$

u. s. w. In allen diesen Ausdrücken können die gesuchten Größen verwechselt werden. Daher muß man nothwendig finden, daß die gesuchten Größen für den Fall des Maximums oder Minimums, einander gleich sind.

Es ist leicht zu sehen, daß die obigen Fälle nicht bloß auf dreiseitige, sondern auch auf vielseitige Figuren sich erstrecken.

362.

Zweites Beispiel. Mit vier gegebenen graden Linien den größten Raum in der Ebene einzuschließen.

Fig. 30. Die vier gegebenen graden Linien mögen a, b, c, d heißen; zwei gegenüberstehende Winkel in dem gesuchten Viereck, z. B. die von a und b, und von c und d eingeschlossenen, sollen u und x heißen, so ist der Inhalt des Vierecks $= \frac{1}{2}ab.\ \sin u + \frac{1}{2}cd.\ \sin x$ und zugleich ist $a^2 + b^2 - 2ab \cos u = c^2 + d^2 - 2cd \cos x$, also sind hier die Grund-Ausdrücke

$$M = ab \sin u + cd \sin x \text{ und}$$

$$A = a^2 + b^2 - 2ab \cos u - c^2 - d^2 + 2cd \cos x = o;$$

folglich ist $\frac{d}{u} M = ab \cos u$, $\frac{d}{x} M = cd \cos x$. und

$\frac{d}{u} A = 2cb \sin u$, $\frac{d}{x} A = - 2cd \sin x$, also ist in (691.)

$- 2abcd \cos u \sin x - 2abcd \cos x \sin u = o$, oder

$\sin u \cos x + \cos u \sin x = 0$, oder $\sin(u + x) = 0$, folglich

$$u + x = 2n\varrho.$$

Da nun nach der Natur der Aufgabe $u + x$ zwischen 0 und 4ϱ liegen muß, weil sich für $u + x = 0$ das Viereck auf die eine Linie BD, für $u + x = 4\varrho$ auf die eine Linie AC reduciren würde, mehr als 4ϱ aber selbst alle Winkel des Vierecks nicht enthalten können, so ist nothwendig $n = 1$, und folglich

$$694.\quad u + x = 2\varrho$$

woraus folgt, daß das gesuchte Viereck dasjenige im Kreise ist, wie aus der Geometrie bekannt.

363.

Drittes Beispiel. Fig. 31. Mit fünf gegebenen graden Linien den größten Raum in der Ebene einzuschließen.

Der Inhalt des Dreiecks EDC ist $\frac{1}{2}ed \sin y$, der Inhalt des Vierecks ABCE ist, wie bekannt, $\frac{1}{2}ab \sin u + \frac{1}{2}bc \sin x - \frac{1}{2}ac \sin(u + x)$. Also ist hier

$$695.\quad M = ab \sin u + bc \sin x - ac \sin(u + x) + ed \sin y.$$

Ferner ist die Diagonale EC einmal $= \sqrt{(d^2 + e^2 - 2de \cos y)}$ und das anderemal, wie bekannt, $= \sqrt{[a^2 + b^2 + c^2 - 2ab \cos u - 2bc \cos x + 2ac \cos(u + x)]}$, also ist

$$606.\quad A = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab \cos u - 2bc \cos x + 2ac \cos(u + x) - d^2 - e^2 + 2de \cos y = 0.$$

Daraus folgt

$$\frac{d}{u} M = ab \cos u - ac \cos(u + x)$$

$$\frac{d}{x} M = bc \cos x - ac \cos(u + x)$$

$$\frac{d}{y} M = ed \cos y$$

$$\frac{d}{u} A = 2ab \sin u - 2ac \sin(u + x)$$

$$\frac{d}{x} A = 2bc \sin x - 2ac \sin(u + x)$$

$$\frac{d}{y} A = -2de \sin y$$

also

also aus (691.)

$$697. \begin{cases} [ab \cos u - ac \cos (u+x)] [bc \sin x - ac \sin (u+x)] \\ - [ab \cos x - ac \cos (u+x)] [ab \sin u - ac \sin (u+x)] \\ = 0, \text{ und} \end{cases}$$

$$698. \quad -[ab \cos u - ac \cos (u+z)] \, de \sin y - ed \cos y (ab \sin u - ac \sin (u+x)) = 0.$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$ab^2c \cos u \sin x - ab^2c \cos x \sin u$$
$$- a^2bc \cos u \sin (u+x) + a^2bc \cos (u+x) \sin u$$
$$- ac^2b \sin x \cos (u+x) + ac^2b \cos x \sin (u+x) = 0,$$

oder

$$699. \quad b \sin (x-u) - a \sin x + c \sin u = 0.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt

$$- ab \cos u \sin y - ab \cos y \sin u + ac \sin y \cos (u+x)$$
$$+ ac \cos y \sin (u+x) = 0,$$

oder

$$700. \quad c \sin u + x + y) - b \sin (u+y) = 0.$$

Aus (700.) folgt $c \sin (u+y) \cos x + c \cos (u+y) \sin x = b \sin (u+y)$ und hieraus $c \cos x + c \sin x \cot (u+y) = b$, also

$$701. \quad \cot (u+y) = \frac{b - c \cos x}{c \sin x}.$$

Wenn CP auf AB senkrecht ist, so ist $AP = b - c \cos x$ und $CP = c \sin x$, also ist $\cot (u+y) = \frac{AP}{CP} = \cot PAC$ und folglich $u + y = PAC + 2n\varrho$, wo leicht zu zeigen, daß n nur 1 sein kann. Also ist $u - PAC = 2\varrho - y$, folglich, weil $u - PAC = EAC$ und $y = EDC$ ist, $EAC + EDC = 2\varrho$. Mithin müssen die vier Ecken A, C, D und E im Kreise liegen. Da das Nämliche für jede vier andere Ecken Statt finden muß, so folgt, daß das gesuchte Fünfeck im Kreise liegen muß, wie aus der Geometrie bekannt ist.

Fast noch leichter folgt dieses Resultat aus der ersten Gleichung (699.) Sie giebt $a \sin x - c \sin u = b \sin x \cos u - b \cos x \sin u$, also, wenn man mit $\sin x \sin u$ dividirt,

$b\frac{\cos u}{\sin u} - b\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{a}{\sin u} - \frac{c}{\sin x}$, also $\frac{b \cos u - a}{\sin u}$ $= \frac{b \cos x - c}{\sin x}$, oder

$$702.\quad \frac{a - b \cos u}{b \sin u} = \frac{c - b \cos x}{b \sin x}$$

das heißt, wenn BR auf AE, und AQ auf BC perpendicular sind, $\frac{ER}{BR} = \frac{CQ}{AQ}$, woraus folgt, daß die Winkel AEP und ACP gleich sein müssen, daß heißt, daß das Fünfeck im Kreise liegen muß.

Aus den Gleichungen (699. und 700.), verbunden mit der gegebenen Bedingungs-Gleichung (696.) kann man weiter die Winkel des Fünfecks u, x, y... finden.

Bekanntlich ist das Fünfeck im Kreise, schon eine ziemlich schwierige Figur. Die Rechnung führte hier auf Gleichungen, die recht einfach sind, besonders in der Gestalt (701. und 702.) und welche die Untersuchung dieser Figur erleichtern können.

364.

Viertes Beispiel. Mit vier graden Linien den größten Raum in der Ebene einzuschließen, wenn die Summe der Länge der Linien und zwei einander gegenüber liegende Winkel des entstehenden Vierecks gegeben sind.

Der Inhalt des entstehenden Vierecks ist $\frac{1}{2}ux \sin \alpha + \frac{1}{2}yz \sin \beta$, und außerdem ist $u + x + y + z$ eine gegebene Größe, z. B. a. Also sind hier die Grund-Ausdrücke

$$703.\begin{cases} M = ux \sin \alpha + yz \sin \beta \\ A = u + x + y + z - a = 0. \end{cases}$$

Es ist also

$$\frac{d}{u} M = x \sin \alpha,\ \frac{d}{x} M = u \sin \alpha,\ \frac{d}{y} M = z \sin \beta,$$

$$\frac{d}{z} M = y \sin \beta,$$

$$\frac{d}{u} A = \frac{d}{x} A = \frac{d}{y} A = \frac{d}{z} A = 1,$$

folglich nach (691.)

$$704 \begin{cases} x \sin\alpha - u \sin\alpha = 0, \\ x \sin\alpha - z \sin\beta = 0, \\ x \sin\alpha - y \sin\beta = 0, \end{cases}$$

woraus folgt

705. $x = u$ und $z = y$.

Desgleichen $z = x \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = y$.

Dies giebt $a = 2x + 2x \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 2x \dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\beta}$ und

$$706. \begin{cases} x = u = \frac{1}{2} a \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}, \text{ also} \\ x = y = \frac{1}{2} a \dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta} \end{cases}$$

und den Inhalt $\frac{1}{2}M = \frac{1}{8} a^2 \dfrac{\sin\beta^2 \sin\alpha}{(\sin\alpha + \sin\beta)^2} + \frac{1}{4} a^2 \dfrac{\sin\alpha^2 \sin\beta}{(\sin\alpha + \sin\beta)^2}$

oder

707. $\frac{1}{2}M = \frac{1}{8} a^2 \dfrac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$.

In dem entstehenden Viereck müssen also die Seiten um die gegebenen Winkel, einander gleich sein, und die gegenüber stehenden Seiten müssen sich wie die Sinus der gegebenen, gegenüber liegenden Winkel verhalten.

Wenn $\alpha = \beta$, so ist $u = x = y = z$, also das Viereck ein verschobenes Quadrat, und wenn $\alpha = \beta = \varrho$, ein wirkliches Quadrat, wie bekannt.

365.

Fünftes Beispiel. Mit vier graden Linien den größten Raum in der Ebene einzuschließen, wenn die Summe der Länge der Linien und ein Winkel gegeben sind.

Die Grundgleichungen sind die nämlichen, wie in der vorigen Aufgabe, nur ist ein Winkel, z. B. β, jetzt noch unbestimmt. Man muß also noch $\dfrac{d}{\beta} M = yz \cos\beta$ berücksichtigen. Die daraus entstehende, noch zu den obigen (704.)

hinzukommende Gleichung ist $\frac{d}{\beta} M = yz \cos\beta = o$, weil $\frac{d}{\beta} A = o$ ist. Dieses giebt $\cos\beta = o$, also

708. $\beta = \varrho$.

Der dem gegebenen gegenüber liegende unbestimmte Winkel muß also ein rechter sein. Der Inhalt des Vierecks ist in diesem Falle

709. $\frac{1}{2}M = \frac{1}{8}a^2 \frac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$

und die Seiten sind

710. $x = u = \frac{1}{2}a. \frac{1}{1+\sin\alpha}$ und $y = z = \frac{1}{2}a \frac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$

366.

Fig. 32. Diese Aufgabe kann, wie leicht zu sehen, auch so ausgedrückt werden: von dem Raum CAD, der zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels liegt, ein gegebenes Stück mittelst zweier graden Linien BC und BD so abzuschneiden, daß der Umfang der Figur so klein als möglich ist. Zu diesem Ende also muß man die beiden graden Linien in einen rechten Winkel zusammenstoßen lassen, und mit ihnen gleich lange Stücken der Schenkel abschneiden.

367.

Sechstes Beispiel. Fig. 33. Mit vier graden Linien den größten Raum in der Ebene einzuschließen, wenn die Summe der Länge der Linien, und zwei neben einander liegende Winkel des entstehenden Vierecks gegeben sind.

Die Bedingungs-Gleichungen, welche bei dieser Aufgabe erfüllt werden müssen, wenn der Inhalt des Vierecks ein Größtes sein soll, entstehen daraus, daß die Seiten, von einander, vermöge der gegebenen Winkel α und β, abhängen, z. B. daß z von u, x, y und den Winkeln α und β abhängt, und daß die Summe der Länge der Seiten bestimmt ist. Hier also finden zwei Bedingungs-Gleichungen Statt. In allen vorigen Beispielen war nur eine Bedingungs-Gleichung vorhanden. Bezeichnet man die Bedingungs-Gleichungen, wie

oben, durch $A = o$ und $B = o$ und den Inhalt durch M, so ist

$$711. \begin{cases} 2M = ux \sin a + uy \sin \beta - xy \sin (\alpha + \beta) \\ 2A = u^2 + x^2 + y^2 - 2ux \cos \alpha - 2uy \cos \beta \\ \qquad + 2xy \cos (\alpha + \beta) - z^2 = o \\ B = u + x + y + z - a = o, \end{cases}$$

wenn der gegebene Umfang a heißt. Aus diesen Gleichungen folgt

$$712. \begin{cases} \frac{d}{u} M = x \sin \alpha + y \sin \beta, \frac{d}{x} M = u \sin \alpha - y \sin (\alpha + \beta) \\ \frac{d}{y} M = u \sin \beta - x \sin (\alpha + \beta) \frac{d}{z} M = o, \end{cases}$$

$$713. \begin{cases} \frac{d}{u} A = u - \cos \alpha - y \cos \beta, \frac{d}{x} A = x - u \cos \alpha \\ \qquad + y \cos (\alpha + \beta) \\ \frac{d}{y} A = y - u \cos \beta + x \cos (\alpha + \beta), \frac{d}{z} A = -z, \end{cases}$$

$$714. \quad \frac{d}{u} B = \frac{d}{x} B = \frac{d}{y} B = \frac{d}{z} B = 1.$$

Die Grund-Gleichungen für das Maximum oder Minimum sind für den Fall zweier Bedingungs-Gleichungen diejenigen (690.) Also ist hier

$$715. \begin{cases} x \sin \alpha + y \sin \beta + \lambda (u - x \cos \alpha - y \cos \beta) + \mu = o \\ u \sin \alpha - y \sin (a + \beta) + \lambda (x - u \cos \alpha + y \cos (\alpha + \beta)) \\ \qquad + \mu = o \\ u \sin \beta - x \sin (\alpha + \beta) + \lambda (y - u \cos \beta + x \cos (\alpha + \beta)) \\ \qquad + \mu = o \\ -\lambda z + \mu = o. \end{cases}$$

Aus der letzten dieser Gleichungen folgt $\mu = \lambda z$, also gehen die drei ersten in folgende über:

$$716. \begin{cases} x \sin \alpha + y \sin \beta \quad + \lambda (z + u - x \cos \alpha - y \cos \beta) = o \\ u \sin \alpha - y \sin (\alpha + \beta) + \lambda (z + x - u \cos \alpha + y \cos (\alpha + \beta)) \\ \qquad = o \\ u \sin \beta - x \sin (\alpha + \beta) + \lambda (z + y - u \cos \beta + x \cos (\alpha + \beta)) \\ \qquad = o. \end{cases}$$

Zu diesen drei Gleichungen kommen die beiden $A = o$ und

$B = 0$ hinzu, um die fünf Größen u, x, y, z und λ zu bestimmen. Aus der Gleichung $B = 0$ folgt

$$z + u = a - x - y$$
$$z + x = a - u - y$$
$$z + y = a - u - x$$

welches in (716.) giebt

$$x \sin\alpha + y \sin\beta \quad + \lambda(a - x(1 + \cos\alpha) - y(1 + \cos\beta)) = 0$$
$$u \sin\alpha - y \sin(\alpha+\beta) + \lambda(a - u(1 + \cos\alpha) - y(1 - \cos(\alpha+\beta))) = 0$$
$$u \sin\beta - x \sin(\alpha+\beta) + \lambda(a - u(1 + \cos\beta) - x(1 - \cos(\alpha+\beta))) = 0,$$

und wenn man hieraus λ wegschafft

$$(x \sin\alpha + y \sin\beta)(a - y(1 - \cos(\alpha+\beta)) - u(1 + \cos\alpha))$$
$$- (u \sin\alpha - y \sin(\alpha+\beta))(a - x(1 + \cos\alpha) - y(1 + \cos\beta)) = 0$$
$$(x \sin\alpha + y \sin\beta)(a - u(1 + \cos\beta) - x(1 - \cos(\alpha+\beta)))$$
$$- (u \sin\beta - x \sin(\alpha+\beta))(a - x(1 + \cos\alpha) - y(1 + \cos\beta)) = 0$$

und wenn man multiplicirt und wegläßt was sich aufhebt:

$$717. \left\{ \begin{array}{l} ax \sin\alpha + ay(\sin\beta + \sin(\alpha+\beta)) + u[(y - a)\sin\alpha \\ \qquad - y(\sin\beta - \sin(\alpha - \beta))] \\ - y(x+y)(\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta)) = 0 \text{ und} \\ ay \sin\beta + ax(\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta)) + u[(x - a)\sin\beta \\ \qquad - x(\sin\alpha - \sin(\beta - \alpha))] \\ - x(x+y)(\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta)) = 0. \end{array} \right.$$

Aus der Bedingungs-Gleichung $A = 0$ folgt

$$u^2 + x^2 + y^2 - 2ux\cos\alpha - 2uy\cos\beta + 2xy\cos(\alpha+\beta) = z^2$$

und aus der Bedingungs-Gleichung $B = 0$

$$a - u - x - y = z,$$

also ist

$$u^2 + x^2 + y^2 - 2ux\cos\alpha - 2uy\cos\beta + 2xy\cos(a+\beta) =$$
$$a^2 + u^2 + x^2 + y^2 - 2au - 2ax - 2ay + 2ux + 2uy + 2xy \text{ oder}$$
$$a^2 - 2au - 2ax - 2ay + 2ux(1 + \cos\alpha) + 2uy(1 + \cos\beta)$$
$$+ 2xy(1 + \cos(\alpha+\beta)) = 0$$

und daraus

$$718. \quad u = \frac{a^2 - 2ax - 2ay + 2xy(1 + \cos(\alpha+\beta))}{2a - 2x(1 + \cos\alpha) - 2y(1 + \cos\beta)}.$$

Setzt man diesen Werth von u in (717.), so erhält man zwei Gleichungen zwischen x und y, aus welchen diese beiden Größen, und dann weiter durch Verwechselung die andern beiden u und z gefunden werden können. Die Gleichungen, woraus x und y entwickelt werden müssen, sind, wie leicht zu sehen, vom dritten Grade.

368.

Diese Aufgabe giebt Gelegenheit zu zwei Bemerkungen.

I. Erstlich nämlich könnte es scheinen, daß die erste Bedingungs-Gleichung $A = 0$ nicht nöthig sei, weil bloß der Umfang der Figur gegeben ist, welchen die zweite Bedingungs-Gleichung ausdrückt, die beiden gegebenen Winkel aber in dem Ausdruck des Inhalts M schon vorkommen. Allein so ist es nicht. Verführe man danach, so wären die Grundgleichungen zur Bestimmung von u, x, y, z,

$$\frac{d}{u}M + \lambda\frac{d}{u}B = 0,\ \frac{d}{x}M + \lambda\frac{d}{x}B = 0,$$

$$\frac{d}{y}M + \lambda\frac{d}{y}B = 0,\ \frac{d}{z}M + \lambda\frac{d}{z}B = 0,$$

welches giebt

$$x\sin\alpha + y\sin\beta + \lambda = 0,\ u\sin\alpha - y\sin(\alpha+\beta) + \lambda = 0$$

$$u\sin\beta - x\sin(\alpha+\beta) + \lambda = 0,\ 0 + \lambda = 0,$$

also $\lambda = 0$, und aus der ersten Gleichung, $y = -x\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, folglich aus der zweiten, $u\sin\alpha = -x\frac{(\sin\alpha+\beta)}{\sin\beta}$ und aus der dritten, $x\sin(\alpha+\beta) = -x\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$, woraus folgt $x = 0$, also auch $u = 0$, $y = 0$, $z = 0$, was ein offenbar unrichtiges Resultat ist. Die Ursach hiervon liegt darin, daß wirklich durch die gegebenen Winkel eine Abhängigkeit der Seiten selbst von einander entsteht, die nicht übersehen werden darf, die aber wirklich übersehen werden würde, wenn man die erste Bedingungs-Gleichung $A = 0$ weglassen wollte. Und zwar muß man grade $u = x = y = z = 0$ und nichts

anders erhalten, weil nur dann, wenn die Seiten der Figur o sind, der Werth der Winkel α und β gleichgültig ist.

Der Fall ist merkwürdig als einer von denen, an welchen zu sehen, wie genau und bestimmt die Rechnung, selbst Fehler der Voraussetzung anzeigt. Der Calcul fehlt nie, und wenn widersprechende oder dunkele Resultate zum Vorschein kommen, so liegt die Schuld gewiß allemal an den Voraussetzungen, nie an der Rechnung.

Dieser Fall zeigt auch Beispielsweise, was bei dem Ausdruck der Bedingungen für die Größen einer Aufgabe, welche sich auf ein Maximum oder Minimum bezieht, zu beobachten ist. Man muß Acht haben, daß die Bedingungs-Gleichungen sämmtliche Größen enthalten, zwischen welchen eine vollkommene oder theilweise Abhängigkeit Statt findet. Deshalb mußten in dem gegenwärtigen Falle nothwendig alle sechs Größen u, x, y, z, α und β in den Bedingungs-Gleichungen vorkommen, denn alle diese Größen sind, vermöge der gegebenen Bedingungen, theilweise von einander abhängig, das heißt, die Veränderung jeder unter ihnen, wirket auf die übrigen.

II. Zweitens könnte man glauben, daß es hier besser gewesen wäre, die beiden Bedingungs-Gleichungen $A = o$ und $B = o$ sogleich in eine zusammen zu ziehen, weil es hier grade leicht ist, die Größe z aus der einen oder der andern Gleichung in u, x und y auszudrücken und zu substituiren. Denn die ganze Methode nützt nur, um die Auflösung von Gleichungen zu vermeiden, die ohne sie nothwendig ist, um die, durch die Bedingungs-Gleichungen gegebenen Werthe einer oder mehrerer von den veränderlichen Größen, in die übrigen auszudrücken, und selbige in den Ausdruck des Maximums oder Minimums selbst, zu substituiren. Wäre es z. B. nachdem der Werth von z aus $B = o$ in $A = o$ substituirt worden, noch leicht, den Werth einer der übrigen veränderlichen Größen u, x oder y aus der Gleichung $A = o$ zu nehmen, und in M zu substituiren, so wäre selbst weiter gar keine Rücksicht auf die Bedingungs-Gleichungen nöthig. Die in M übrig bleibenden Größen wären nach der Substitution völlig

von einander unabhängig, und es wäre ohne Weiteres, $\frac{d}{n} M = 0$, $\frac{d}{x} M = 0$ ꝛc., woraus zunächst die in M übrig gebliebenen Größen, und dann die weggeschafften, aus den Bedingungs-Gleichungen, bestimmt werden könnten. Allein die Elimination vor der Anwendung erleichtert selbst bei der einfachsten Form der Bedingungs-Gleichungen, wie hier, die Rechnung grade nicht, wie durch einen Versuch an dem gegenwärtigen Fall leicht zu sehen ist. Die Anwendung der Methode ist fast überall nützlich.

369.

Siebentes Beispiel. Mit drei graden Linien von gegebener Summe das größte Dreieck einzuschließen, wenn ein Winkel desselben gegeben ist.

Diese Aufgabe ist in der vorigen enthalten, wenn man $u = 0$, und einen der gegebenen Winkel α und β z. B. β, $= 2\varrho$ setzt; denn dann geht das Viereck in ein Dreieck über. Diese Werthe von u und β z. B. in (717.) gesetzt giebt

$$ax \sin \alpha - ay \sin \alpha = 0,$$

woraus folgt

$$x = y.$$

Man muß also gleich lange Stücke der Schenkel des gegebenen Winkels abschneiden, um mit einem gegebenen Umfange den größten Raum zu erhalten, wie bekannt.

370.

Achtes Beispiel. Mit vier graden Linien den größten Raum einzuschließen, wenn eine der vier Linien und die Summe der drei übrigen, so wie die, der gegebenen Linie gegenüber liegenden beiden Winkel des entstehenden Vierecks gegeben sind.

Diese Aufgabe ist ebenfalls in der sechsten (§. 367.) enthalten, wenn man statt z eine bestimmte Größe b setzt.

Dieses ändert an den Gleichungen (715.) nichts weiter, als daß, wie leicht zu sehen, die vierte Gleichung wegfällt. Es ist also jetzt, wenn man zwischen den übrig bleibenden drei Gleichungen sogleich μ wegschafft

$$719. \begin{cases} (x - u)\sin\alpha + y(\sin\beta + \sin(\alpha+\beta)) + \lambda[(u - x) \\ \qquad (1 + \cos\alpha) - y(\cos\beta + \cos(\alpha+\beta))] = 0 \\ (y - u)\sin\beta + x(\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta)) + \lambda[(u - y) \\ \qquad (1 + \cos\beta) - x(\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta))] = 0. \end{cases}$$

Schafft man hieraus noch λ weg, so erhält man nach gehöriger Reduction

$$720. \begin{cases} (x^2 - xy - (u - y)^2)\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta)) \\ \qquad + xy(\sin\alpha - \sin\beta + \sin(\alpha+\beta)) = 0. \end{cases}$$

Es ist $\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha(1 + \cos\beta) + \sin\beta(1 + \cos\alpha) = 2\sin\alpha\cos\frac{1}{2}\beta^2 + 2\sin\beta\cos\frac{1}{2}\alpha^2 = 4\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta^2 + 4\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\alpha^2 = 4\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta(\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta + \cos\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta) = 4\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ und

$\sin a - \sin\beta + \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha(1 + \cos\beta) - \sin\beta(1 + \cos\alpha) = 4\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ also ist in (721.)

$$(x^2 - xy - (u - y)^2)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) + xy\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = 0$$

oder, da $\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) - \sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = 2\cos\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta$

$$721. \quad (x^2 - (u - y)^2)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) - 2xy\cos\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta = 0.$$

Setzt man in diese Gleichung den Werth von u aus $u + x + y = c$, nämlich $u = c - x - y$, so erhält man

$$722. \quad (cx - 2xy - c^2 + 2cy - 2y^2)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) - xy\cos\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta = 0,$$

woraus man x finden kann.

Von der andern Seite findet man noch eine Gleichung zwischen x und y, wenn man den Werth von $u = c - x - y$ in die Gleichung $A = 0$ (711.) die hier $u^2 + x^2 + y^2 - 2ux\cos\alpha - 2uy\cos\beta + 2xy\cos(\alpha+\beta) = b^2$ ist, setzt. Substituirt man nun darin den aus (723.) genommenen Werth von x, so erhält man eine Gleichung mit y allein, woraus solches gefunden werden kann. Die Gleichung ist vom vierten Grade.

371.

Neuntes Beispiel.

I. Mit einer gegebenen Oberfläche den größten Cylinder zu umschließen.

Der Halbmesser der Grundfläche des Cylinders sei u, die Höhe x, so ist der Inhalt $= u^2 \pi x$.

Die gegebene Fläche ist $2u^2\pi + 2ux\pi$. Also ist hier

$$723. \begin{cases} M = u^2 x \text{ und} \\ A = u^2 + ux - b^2 = 0. \end{cases}$$

Dieses giebt $\frac{d}{u} M = 2ux$, $\frac{d}{x} M = u^2$

$\frac{d}{u} A = 2u + x$, $\frac{d}{x} A = u$.

Also ist in (691.)

$2ux \cdot u - u^2 (2u + x) = 0$, woraus folgt

$2u^2 x = 2u^3 - u^2 x = 0$, oder

$2x - 2u - x = 0$, also

724. $x = 2u$,

das heißt: die Höhe des Cylinders muß dem Durchmesser seiner Grundfläche gleich sein, wie bekannt.

II. Wenn dem Cylinder ein Boden fehlt, also derselbe die Gestalt eines oben offenen Gefäßes hat, so ist

$$725. \begin{cases} M = u^2 x \\ A = u^2 + 2ux - 2b^2 = 0, \end{cases}$$

also $\frac{d}{u} M = 2ux$, $\frac{d}{x} M = u^2$

$\frac{d}{u} A = 2u + 2x$, $\frac{d}{x} A = 2u$, also in (691.)

$2ux \cdot 2u - u^2 (2u + 2x) = 0$, oder

$2x - u - x = 0$, woraus folgt

726. $x = u$,

das heißt: die Höhe des Cylinders muß seinem Halbmesser gleich sein.

372.

Zehntes Beispiel.

I. Mit einer gegebenen Oberfläche den größten Kegel zu umschließen.

Der Halbmesser der Grundfläche des Kegels sei u, die

Höhe x, so ist der Inhalt $= u^2\pi \cdot \frac{1}{3}x$ und die Fläche $u^2\pi + \pi u \sqrt{(u^2+x^2)}$, also ist hier

$$727. \begin{cases} M = u^2 x \\ A = u^2 + u\sqrt{(u^2+x^2)} - b^2 = 0, \end{cases}$$

dies giebt $\frac{d}{u} M = 2ux$, $\frac{d}{x} M = u^2$ und

$$\frac{d}{u} A = 2u + \sqrt{(u^2+x^2)} + \frac{u^2}{\sqrt{(u^2+x^2)}}$$

$$= \frac{2u\sqrt{(u^2+x^2)} + 2u^2 + x^2}{\sqrt{(u^2+x^2)}}$$

$$\frac{d}{x} A = \frac{ux}{\sqrt{(u^2+x^2)}}.$$

Also ist in (691.)

$$2ux \frac{ux}{\sqrt{(u^2+x^2)}} - u^2 \frac{2u\sqrt{(u^2+x^2)} + 2u^2 + x^2}{\sqrt{(u^2+x^2)}} = 0, \text{ oder}$$

$$2u^2x^2 - 2u^4 - u^2x^2 = 2u^3\sqrt{(u^2+x^2)}, \text{ oder}$$

$$x^2 - 2u^2 = 2u\sqrt{(u^2+x^2)} \text{ oder}$$

$$x^4 - 4u^2x^2 + 4u^4 = 4u^4 + 4u^2x^2, \text{ oder}$$

$$x^4 = 8u^2x^2 \text{ und } x^2 = 8u^2, \text{ also}$$

$$728. \quad x = u\sqrt{8} = 2u\sqrt{2},$$

das heißt: die Höhe des Kegels muß gleich sein, dem Durchmesser mit $\sqrt{2}$ multiplicirt.

Es ist $x^2 + u^2 = x^2 + 8u^2 + u^2 = 9u^2$, also

$$\sqrt{(x^2+u^2)} = 3u,$$

also muß die schräge Seite des Kegels dem anderthalbfachen Durchmesser gleich sein.

II. Wenn dem Kegel der Boden fehlt, so ist

$$729. \begin{cases} M = u^2 x \\ A = u\sqrt{(u^2+x^2)} - b^2 = 0, \end{cases}$$

also $\frac{d}{u} M = 2ux$, $\frac{d}{x} M = u^2$

$$\frac{d}{u} A = \sqrt{(u^2+x^2)} + \frac{u^2}{\sqrt{(u^2+x^2)}}, \quad \frac{d}{x} A = \frac{ux}{\sqrt{(u^2+x^2)}}$$

also ist in (691.)

$$2ux \cdot \frac{ux}{\sqrt{(u^2+x^2)}} - u^2 (\sqrt{(u^2+x^2)} + \frac{u^2}{\sqrt{(u^2+x^2)}} = 0,$$

oder $2x^2u^2 - u^4 - u^2x^2 - u^4 = 0$, oder

$$x^2 = 2u^2$$

$$730. \quad x = u\sqrt{2}.$$

Also muß die Höhe des Kegels gleich den Seiten des in die Grundfläche eingeschriebenen Quadrats sein.

373.

Eilftes Beispiel.

I. Mit einer gegebenen Oberfläche den größten abgekürzten Kegel, oder umgekehrt, einen gegebenen körperlichen Raum mit der kleinsten Fläche eines abgekürzten Kegels zu umschließen, wenn vorausgesetzt wird, daß der obere Durchmesser m mal den untern enthält.

Der untere Halbmesser sei u, so ist der obere mu. Die Höhe sei x, so ist der Inhalt des Kegels $= \frac{1}{3}\pi x (u^2 + mu^2 + m^2u^2) = \frac{1}{3}\pi x u^2 (1 + m + m^2.)$. Die Oberfläche ist $u^2\pi + m^2u^2\pi + \frac{1}{2}(2\pi mu + 2\pi u) \sqrt{((mu - u)^2 + x^2)} = \pi u^2 (1 + m^2) + \pi u (1 + m) \sqrt{(u^2 (m - 1)^2 + x^2)}$. Also ist hier

$$731. \begin{cases} M = u^2 (1 + m^2) + u (1 + m) \sqrt{(u^2(m-1)^2 + x^2)} \\ A = u^2x - a^3 = 0. \end{cases}$$

Dieses giebt

$$\frac{d}{u} M = 2u (1 + m^2) + (1 + m) \sqrt{(u^2 (m - 1)^2 + x^2)} + \frac{u^2 (m-1)^2 (m+1)}{\sqrt{(u^2 (m-1)^2 + x^2)}}$$

$$\frac{d}{x} M = \frac{ux (m + 1)}{\sqrt{(u^2 (m - 1)^2 + x^2)}}$$

$$\frac{d}{u} A = 2ux, \quad \frac{d}{x} A = u^2$$

also ist in (691.)

$$2u^3 (1 + m^2) \sqrt{(u^2 (m - 1)^2 + x^2)} + u^2 (1 + m)(u^2(m - 1)^2 + x^2 + u^4 (m - 1)^2 (m + 1) - 2u^2x^2 (m + 1) = 0,$$ oder

$$2u (1 + m^2) \sqrt{(x^2 + (m - 1)^2 u^2)} = -u^2(m - 1)^2 (m + 1)$$

$$- x^2 (1 + m) - u^2 (m - 1)^2 (m + 1) + 2x^2 (1 + m)$$
$$= x^2 (1 + m) - 2u^2 (m - 1)^2 (m + 1)$$

also

$$(4u^2x^2 + 4u^4 (1 - m)^2) (1 + m^2)^2 (m + 1)^2 = (x^4 - 4x^2u^2 (m - 1)^2 + 4u^4 (m - 1)^4),$$ oder

$$x^4 (1 + m)^2 - 4x^2u^2 ((m^2 - 1)^2 + (m^2 + 1)^2) + 4u^4 (m^2 - 1)^2 (m - 1)^2 - (m - 1)^2 (m^2 + 1)^2) = 0,$$ oder

$$x^4 (1 + m)^2 - 8x^2u^2 (m^4 + 1) + 16u^4m^2 (m - 1)^2 = 0.$$

Dieses giebt

$$x^2 = \frac{4u^2 (m^4 + 1)}{(m + 1)^2} \pm \sqrt{\left[\frac{16u^4(m^4+1)^2 - 16u^4m^2(m-1)^2(m+1)^2}{(m+1)^4}\right]}$$

oder

$$732. \quad x^2 = \frac{4u^2}{(m+1)^2)}[m^4 + 1 \pm \sqrt{((m^4+1)^2 - m^2(m-1)^2)}]$$

welches das Verhältniß der Höhe zum untern Durchmesser giebt.

Für $m = 0$ ist der Kegel nicht abgekürzt, sondern voll. Setzt man $m = 0$ in (727.), so erhält man

$$x^2 = 8u^2$$

wie in (726.).

II. Wenn dem abgekürzten Kegel der obere Boden fehlt, also derselbe die Form eines oben offenen kegelförmigen Gefäßes hat, für welches das Verhältniß der Durchmesser gegeben ist, so ist

$$733. \begin{cases} M = u^2 + u (1 + m) \sqrt{(u^2 (m - 1)^2 + x^2)} \\ A = u^2x - a^3 = 0, \end{cases}$$

also

$$\frac{d}{u}M = 2u + (1 + m)\sqrt{(u^2(m-1)^2 + x^2)} + \frac{u^2 (m-1)^2 (m + 1)}{\sqrt{(u^2 (m-1)^2 + x^2)}}$$

$$\frac{d}{x}M = \frac{ux (1 + m)}{\sqrt{(u^2 (m - 1)^2 + x^2)}}$$

$$\frac{d}{u}A = 2ux, \quad \frac{d}{x}A = u^2,$$

also in (691.)

$$2u^3 + (1+m)u^2 \sqrt{(u^2 - (m-1)^2 + x^2)} + \frac{u^4 (m-1)^2 (m+1)}{\sqrt{(u^2 (m-1)^2 + x^2)}}$$

$$- \frac{2u^2 x^2 (1+m)}{\sqrt{(u^2 (m-1)^2 + x^2)}} = 0,$$

welches giebt

$$734. \quad x^2 = \frac{2u^2}{(m+1)^2} (m^2 - 2m + 2 \pm \sqrt{(3m^4 - 6m^2 + 4)}).$$

374.

Zwölftes Beispiel. Fig. 34. Mit einer gegebenen Oberfläche den größten körperlichen Raum zu umschließen, der die Gestalt eines Schiffs ohne Kiel, oder eines Fährnachens, also die Gestalt eines oben offenen Parallelepipedums hat, an dessen Seiten sich zwei, ebenfalls oben offene Pyramiden anschließen, nach Figur 34, und zwar, wenn angenommen wird, daß $AB = m . BD$.

Die Fläche dieses Körpers ist $ux + 2(u + mu)y + 2xy \sqrt{(1 + m^2)}$, der Inhalt $(u + mu)xy$, also ist

$$735. \begin{cases} M = (u + mu) xy \\ A = ux + 2y(n + mu) + 2xy \sqrt{(1 + m^2)} - a^2 = 0. \end{cases}$$

Daraus folgt

$$\frac{d}{u} M = (1+m) xy, \quad \frac{d}{x} M = (1+m) uy, \quad \frac{d}{y} M = (1+m) ux$$

$$\frac{d}{u} A = x + 2y(1+m), \quad \frac{d}{x} A = u + 2y \sqrt{(1+m^2)}$$

$$\frac{d}{y} A = 2u(1+m) + 2x\sqrt{(1+m^2)},$$ mithin in (691.)

$$(1+m)xy(u + 2y\sqrt{(1+m^2)}) - (1+m)uy(x + 2y(1+m)) = 0$$

$$(1+m)xy(2u(1+m) + 2x\sqrt{(1+m^2)}) - (1+m)ux(x + 2y(1+m)) = 0,$$ oder

$xu + 2xy\sqrt{(1+m^2)} = xu + 2uy(1+m)$, woraus folgt

$$736. \quad x\sqrt{(1+m^2)} = y(1+m)$$

$2yu(1+m) + 2xy\sqrt{(1+m^2)} = ux + 2uy(1+m)$, also

$$737. \quad 2y\sqrt{(1+m^2)} = u,$$

welches die Verhältnisse der Größen u, x, y unter einander giebt.

Wäre z. B. $m = 1$ oder $AB = BD$, so wäre $x\sqrt{2} = 2y$ und $2y\sqrt{2} = u$, oder

738. $u = y\sqrt{8}$ und $x = y\sqrt{2}$.

335.

Dreizehntes Beispiel. Die Gestalt eines Hauses zu finden, welches, einen gegebenen Raum fassend, so wenig zu bauen kosten soll als möglich, wenn angenommen wird, daß die Grundfläche ein Parallelogramm ist, die Höhe des Daches sich nach der Tiefe richtet, und das Dach Giebel hat, also prismatisch ist.

Die Länge des Hauses sei u, die Breite x, die Höhe y, die Höhe des Daches ky. Die Fläche der Boden, Decken und des Daches verhält sich wie ux, denn auch das Dach verhält sich wie die Grundfläche. Die Fläche desselben nämlich ist $2x\sqrt{(\frac{1}{4}x^2 + k^2x^2)} = ux\sqrt{(1 + 4k^2)}$. Die Fläche der Wände verhält sich wie $(u + x)y$, die Fläche der Giebel wie x^2; also lassen sich die Kosten der Wände durch $p(u+x)y$, die Kosten der Boden, Decken und des Daches durch qux, und die Kosten der Giebel durch rx^2 ausdrücken. Der umschlossene Raum läßt sich, wenn noch darauf Rücksicht genommen wird, daß vielleicht der untere Raum nutzbarer ist als der obere, durch $uxy + mux^2$ ausdrücken, mithin ist hier, weil auch noch $p = 1$ gesetzt werden kann

$$739. \begin{cases} M = (u + x)y + qux + rx^2 \text{ und} \\ A = uxy + mux^2 - a^3 = 0. \end{cases}$$

Dieses giebt

$$\frac{d}{u}M = y + qx, \quad \frac{d}{x}M = y + qu + 2rx, \quad \frac{d}{y}M = u + x$$

$$\frac{d}{u}A = xy + mx^2, \quad \frac{d}{x}A = uy + 2mux, \quad \frac{d}{y}A = ux,$$

folglich ist

$$y + qx + \lambda(xy + mx^2) = 0$$
$$y + qu + 2rx + \lambda(uy + 2mux) = 0$$
$$u + x + \lambda ux = 0.$$

Schafft man zwischen der ersten und dritten, und zwischen der zwei-

zweiten und dritten von diesen Gleichungen, λ weg, so erhält man

$$(y + qx)\,ux - (u + x)(xy + mx^2) = 0 \text{ und}$$
$$(y + qu + 2rx)\,ux - (u + x)(uy + 2mux) = 0, \text{ oder}$$
$$yu + qux - uy - mux - xy - mx^2 = 0 \text{ und}$$
$$yx + qux + 2rx^2 - uy - 2mux - xy - 2mx^2 = 0, \text{ oder}$$

$$740. \begin{cases} qu - mu - y - mx = 0 \text{ und} \\ 2x^2(r - m) - ux(2m - q) - uy = 0. \end{cases}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt

$$y = (q - m)\,u - mx.$$

Aus der Gleichung $A = 0$ (739.) folgt

$$y = \frac{a^3 - mux^2}{ux}, \text{ also ist}$$

$$a^3 - mux^2 = (q - m)\,u^2x - mux^2, \text{ oder}$$

$$741. \quad a^3 = (q - m)\,u^2x.$$

Aus der zweiten Gleichung (740.) folgt $uy = 2x^2(r - m) - ux(2m - q)$, und aus der Gleichung $A = 0$ (739.),

$$uy = \frac{a^3 - mux^2}{x}; \text{ also ist}$$

$$2x^3(r - m) - ux^2(2m - q) = a^3 - mux^2, \text{ oder}$$

$$742. \quad a^3 = x^2((q - m)\,u + 2(r - m)\,x).$$

Setzt man hierin $x = \frac{a^3}{u^2(q - m)}$ aus (741.), so erhält man

$$a^3 = \frac{a^6}{u^4(q - m)^2}\left[2(r - m)\frac{a^3}{u^2(q - m)} + (q - m)u\right] \text{ oder}$$

$$u^6(q - m)^3 = a^3\left[2(r - m)\,a^3 + u^3(q - m)^2\right], \text{ also}$$

$$u^6 - \frac{a^3}{q - m}\cdot u^3 - \frac{2a^6(r - m)}{(q - m)^3} = 0, \text{ und hieraus}$$

$$u^3 = \frac{a^3}{2(q - m)} \pm \sqrt{\left(\frac{a^6}{4(q - m)^2} + \frac{2a^6(r - m)}{(q - m)^3}\right)}, \text{ oder}$$

$$743. \quad u^3 = \frac{a^3}{2(q - m)}\left[1 \pm \sqrt{\left(1 + 8\cdot\frac{r - m}{q - m}\right)}\right].$$

Man setze der Kürze wegen

744. $1 \pm \sqrt{\left(1 + 8\,\frac{r - m}{q - m}\right)} = n$, so ist

$$u^3 = \frac{a^3 n}{2(q - m)}.$$

Nun war $\frac{a^3}{q - m} = u^2 x$ (741.), also ist

$2u^3 = nu^2 x$ und $2u = nx$ folglich $x = \frac{2u}{n}$ und $x^3 = \frac{8u^3}{n^3}$

also, da $u^3 = \frac{a^3 n}{2(q-m)}$,

745. $$x^3 = \frac{4a^3}{n^2\,(q - m)}.$$

Endlich war $y = (q - m)\,u - mx$ (740.). Also ist

$$y = (q - m)\,a\,\sqrt[3]{\frac{n}{2(q-m)}} - ma\,\sqrt[3]{\frac{4}{n^2\,(q - m)}},$$ oder

$$y = (q - m)\,a\,\sqrt[3]{\frac{n}{2(q-m)}} - \frac{2ma}{n}\,\sqrt[3]{\frac{n}{2(q-m)}},$$ oder

$$y = a\left(q - m - \frac{2m}{n}\right)\sqrt[3]{\frac{n}{2(q-m)}},$$ oder

746. $$y^3 = \frac{a^3 n}{2(q-m)}\left(q - m - \frac{2m}{n}\right)^3.$$

Die Gleichungen (743. 745. und 746.) geben die Werthe von u, x und y, also die Länge, Breite und Höhe des Hauses mit gegebenem Raum, für die geringsten Kosten.

376.

Vierzehntes Beispiel. Von einer mit drei Ebenen umschlossenen körperlichen Ecke, mittelst einer vierten Ebene, einen gegebenen Raum so abzuschneiden, daß die Oberfläche der entstehenden Pyramide so klein sei als möglich.

Die Entfernungen von der Spitze, in welcher die drei Kanten der Pyramide von der gesuchten vierten Ebene geschnitten werden, sollen u, x, y heißen, die Winkel, welche diese Kanten einschließen, der Reihe nach α, β, γ; so ist der Inhalt der Pyramide

$= \frac{1}{6} uxy \sqrt{(1 - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)}$
(191. 1ster Theil. S. 131.) Die drei Flächen sind
$\frac{1}{2} ux \sin\alpha + \frac{1}{2} xy \sin\beta + \frac{1}{2} yu \sin\gamma$.
Die vierte Fläche ist ein Dreieck, von dessen Seiten die Quadrate
$u^2 + x^2 - 2ux\cos\alpha,\ x^2 + y^2 - 2xy\cos\beta,\ y^2 + u^2 - 2yu\cos\gamma$
sind. Der Inhalt dieses Dreiecks läßt sich also, wie bekannt, durch

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{[4(u^2 + x^2 - 2ux\cos\alpha)(x^2 + y^2 - 2xy\cos\beta) - (u^2 + x^2 - 2ux\cos\alpha + x^2 + y^2 - 2xy\cos\beta - y^2 - u^2 + 2uy\cos\gamma)^2]}$$

oder durch

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{[(u^2 + x^2 - 2ux\cos\alpha)(x^2 + y^2 - 2xy\cos\beta) - (x^2 - ux\cos\alpha - xy\cos\beta + uy\cos\gamma)^2]}$$

oder durch

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\begin{aligned}[&u^2x^2 + u^2y^2 - 2u^2xy\cos\beta + x^4 + x^2y^2 - 2x^3y\cos\beta \\ &- 2ux^3\cos\alpha - 2ux^2y\cos\alpha + 4x^2uy\cos\alpha\cos\beta \\ &- x^4 - u^2x^2\cos\alpha^2 - x^2y^2\cos\beta^2 - u^2y^2\cos\gamma^2 \\ &+ 2ux^3\cos\alpha + 2yx^3\cos\beta - 2uyx^2\cos\gamma \\ &- 2x^2yu\cos\alpha\cos\beta + 2u^2xy\cos\alpha\cos\gamma \\ &+ 2y^2ux\cos\beta\cos\gamma]\end{aligned}}$$

oder durch

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\begin{aligned}[&u^2x^2\sin\alpha^2 + x^2y^2\sin\beta^2 + u^2y^2\sin\gamma^2 \\ &- 2u^2xy(\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma) - 2x^2yu(\cos\gamma - \cos\beta\cos\alpha) \\ &- 2y^2ux(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)]\end{aligned}}$$

ausdrücken. Also sind hier die Grund-Gleichungen

$$747.\left\{\begin{aligned}M &= ux\sin\alpha + xy\sin\beta + yu\sin\gamma \\ &+ \sqrt{[u^2x^2\sin\alpha^2 + x^2y^2\sin\beta^2 + u^2y^2\sin\gamma^2} \\ &\overline{- 2u^2xy(\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma) - 2x^2yu(\cos\gamma} \\ &\overline{- \cos\beta\cos\alpha) - 2y^2ux(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)]} \\ \text{und } A &= uxy - a^3 = 0.\end{aligned}\right.$$

Man bezeichne, der Kürze wegen, die Wurzel-Größe M durch p, so ist

$$\frac{d}{u}M = x\sin\alpha + y\sin\gamma + \frac{\begin{aligned}ux^2\sin\alpha^2 + uy^2\sin\gamma^2 - 2uxy(\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma) \\ - y^2x(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma) \\ - x^2y(\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta)\end{aligned}}{p}$$

$$\frac{d}{x} M = u \sin\alpha + y \sin\beta + \frac{xu^2 \sin\alpha^2 + y^2 x \sin\beta^2 - u^2 y(\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma) - 2uxy(\cos\gamma - \cos\beta\cos\alpha) - y^2 u(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)}{p}$$

$$\frac{d}{y} M = x \sin\beta + u \sin\gamma + \frac{x^2 y \sin\beta^2 + u^2 y \sin\gamma^2 - u^2 x(\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma) - x^2 u(\cos\gamma - \cos\beta\cos\alpha) - 2uxy(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)}{p}$$

$$\frac{d}{u} A = xy,\ \frac{d}{x} A = uy,\ \frac{d}{y} A = ux.$$

Bezeichnet man die Zähler der Brüche in $\frac{d}{u} M$, $\frac{d}{x} M$, $\frac{d}{y} M$ einstweilen durch k, m, n, so erhält man

$$x \sin\alpha + y \sin\gamma + \frac{k}{p} + \lambda xy = 0$$

$$u \sin\alpha + y \sin\beta + \frac{m}{p} + \lambda uy = 0$$

$$x \sin\beta + u \sin\gamma + \frac{n}{p} + \lambda ux = 0$$

und daraus:

$$(x \sin\alpha + y \sin\beta) uy - (u \sin\alpha + y \sin\beta) xy + \frac{kyu - mxy}{p} = 0$$

$$(x \sin\alpha + y \sin\gamma) ux - (x \sin\beta + u \sin\gamma) xy + \frac{kux - nxy}{p} = 0,$$

oder

$$748. \begin{cases} y\ (u \sin\gamma - x \sin\beta) + \dfrac{ku - mx}{p} = 0 \\ x\ (u \sin\alpha - y \sin\beta) + \dfrac{ku - ny}{p} = 0. \end{cases}$$

Diese beide Gleichungen mit $A = uxy - a^3 = 0$ (747.) dienen zur Bestimmung der drei Größen u, x, y.

Man findet, wenn man die Werthe von k, m, n und p substituirt und die Rechnung ausführt, die drei Gleichungen

749. I. $ux(u^2 + x^2) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma)$
$\sin \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha)$
$+ 2x^2u^2 [\sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma)$
$- \tfrac{1}{2} \sin \alpha \sin \beta \sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma) - \tfrac{1}{2} \sin \alpha \sin \gamma$
$\sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma)]$
$- y^2 (u \sin \gamma - x \sin \beta)^2 \sin \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha)$
$- 2uxy (u \sin \gamma - x \sin \beta) \sin (\gamma - \beta) \sin \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha) = 0$

II. $yu(y^2 + u^2) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma)$
$\sin \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha)$
$+ 2y^2u^2 [\sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma) \sin \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha)$
$- \tfrac{1}{2} \sin \gamma \sin \alpha \sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma) - \tfrac{1}{2} \sin \gamma \sin \beta$
$\sin \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha)]$
$- x^2 (y \sin \beta - u \sin \alpha)^2 \sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma)$
$- 2uxy (y \sin \beta - u \sin \alpha) \sin (\beta - \alpha) \sin (\alpha + \beta - \gamma) = 0$

III. $xy(x^2 + y^2) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma)$
$\sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \gamma - \alpha)$
$+ 2x^2y^2 [\sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) \sin \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma)$
$- \tfrac{1}{2} \sin \beta \sin \gamma \sin \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha) - \tfrac{1}{2} \sin \beta \sin \alpha$
$\sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma)]$
$- u^2 (x \sin \alpha - y \sin \gamma)^2 \sin \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha)$
$- 2uxy (x \sin \alpha - y \sin \gamma) \sin (\alpha - \gamma) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma) = 0,$

wovon zwei nothwendig die dritte enthalten müssen. Aus zwei von diesen Gleichungen also, und der dritten $A = uxy - a^3 = 0$ (747.) müßten u, x und y gefunden werden. Es scheint, daß die Auflösung höherer Gleichungen nöthig ist, um x, y und z zu entwickeln.

377.

Wollte man bloß die drei Seiten-Flächen der Pyramide, ohne die Grundfläche, in Rechnung bringen, so wären k, m und n in (748.) gleich Null. Also wären daselbst $u \sin \gamma = x \sin \beta$ und $u \sin \alpha = y \sin \beta$, folglich $x = u \dfrac{\sin \gamma}{\sin \beta}$,

$y = u \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ und da $uxy = a^3$ (747.) ist, $u^3 \frac{\sin\alpha \sin\gamma}{\sin\beta^2}$ $= a^3$, also in diesem Fall:

$$u = a \sqrt[3]{\frac{\sin\beta^2}{\sin\alpha \sin\gamma}}, x = a \sqrt[3]{\frac{\sin\gamma^2}{\sin\alpha \sin\beta}}, y = a \sqrt[3]{\frac{\sin\alpha^2}{\sin\beta \sin\gamma}}$$

378.

Macht man $\alpha = \beta = \gamma$, so findet man aus (749.)

$$u = x = y,$$

so daß also gleich lange Stücke der Schenkel mit der Grundfläche abgeschnitten werden müssen, wie bei Dreiecken.

15.

Einige Bemerkungen über die Punkte der mittlern und kleinsten Entfernung.

379.

Man nennt bekanntlich diejenige grade Linie, welche die Eigenschaft hat, daß die Summen der Perpendikel, welche sich aus beliebigen Punkten in der Ebene, z. B. aus den Ecken eines beliebigen Vielecks, auf sie fällen lassen, zu beiden Seiten der Linie gleich groß sind, oder daß ihre algebraische Summe gleich Null ist, Axe der mittlern Entfernung für die Ecken des Vielecks. Für beliebige Punkte im Raum heißt diejenige Ebene, welche die Eigenschaft hat, daß die algebraische Summe der Perpendikel aus den verschiedenen Punkten auf die Ebene, gleich Null ist, Ebene der mittlern Entfernung. Der Ort, in welchem sich zwei Axen oder drei Ebenen der mittlern Entfernung schneiden, heißt Punkt der mittlern Entfernung. Man findet über diesen Punkt der mittlern Entfernung unter andern interessante Untersuchungen bei Carnot, in der géometrie de position und von Grüson in den Memoiren der Berliner Academie. Der Punkt ist kein anderer, als der Schwerpunkt des gegebenen Systems von Punkten.

Man kann Punkt der kleinsten Entfernung denjenigen Punkt nennen, der die Eigenschaft hat, daß die Summe seiner Entfernungen von beliebigen Punkten in der Ebene oder im Raum, kleiner ist als die Summe der Ent-

fernungen jedes andern Punktes von den nämlichen Punkten. Man findet über diesen Punkt, für den besondern Fall dreier willkührlicher Punkte, eine interessante Untersuchung von Grüson in obengenannten Memoiren für 1816 und 1817.

Die Eigenschaften der Punkte der mittlern und kleinsten Entfernung, allgemein, für beliebige Punkte, hängen auf eine merkwürdige Art mit einander zusammen, worüber ich einige Bemerkungen mittheilen will.

380.

Es wird gut sein, Einiges über den Punkt der mittlern Entfernung vorauszuschicken.

Fig. 35. Zuerst ist zu bemerken, daß alle Axen der mittlern Entfernung sich in einem und demselben Punkte schneiden. Denn man bezeichne die Entfernungen des Punkts der mittlern Entfernung M, von gegebenen Punkten in der Ebene A, B, C, D, E, mit eben diesen Buchstaben, und die Winkel, welche die Linien aus A, B, C... nach M mit irgend einer, durch den Punkt der mittlern Entfernung gehenden Axe KL machen, durch α, β, γ, δ, ε, so muß, vermöge der Eigenschaft des Punkts der mittlern Entfernung, $AA' + BB' + CC' \ldots = 0$, das heißt

750. $A \sin \alpha + B \sin \beta + C \sin \gamma \ldots = 0$

sein. Da aber die eine Axe den Punkt der mittlern Entfernung noch nicht bestimmt, der vielmehr der Durchschnitt zweier Axen ist, so nehme man eine solche zweite Axe PN senkrecht auf die erste an. Für diese muß die Summe der Perpendikel AA'', BB'', $CC'' \ldots$ ebenfalls Null sein; also ist auch

751. $A \cos \alpha + B \cos \beta + C \cos \gamma = 0 \ldots$

Nun nehme man zwei beliebige andere, auf einander senkrechte, Axen an, die sich im Punkte der mittlern Entfernung schneiden, z. B. $K'L'$ und $P'N'$, und nenne den Winkel, welchen diese Axen mit den vorigen machen, φ, so ist die Summe der Perpendikel auf diese Axen, wie leicht zu sehen,

752. $\begin{cases} A \sin(\alpha - \varphi) + B \sin(\beta - \varphi) + C \sin(\gamma - \varphi) \ldots \text{und} \\ A \cos(\alpha - \varphi) + B \cos(\beta - \varphi) + C \cos(\gamma - \varphi) \ldots \end{cases}$

oder

$$(A \sin\alpha \cos\varphi - \cos\alpha \sin\varphi) + (\sin\beta \cos\varphi - \cos\beta \sin\varphi)\ldots$$

und $A(\cos\alpha \cos\varphi + \sin\alpha \sin\varphi) + (\cos\beta \cos\varphi + \sin\beta \sin\varphi)\ldots$

oder

$$(A \sin\alpha + B \sin\beta + C \sin\gamma \ldots) \cos\varphi$$
$$- (A \cos\alpha + B \cos\beta + C \cos\gamma \ldots) \sin\varphi \quad \text{und}$$
$$(A \cos\alpha + B \cos\beta + C \cos\gamma \ldots) \cos\varphi$$
$$+ (A \sin\alpha + B \sin\beta + C \sin\gamma \ldots) \sin\varphi$$

Die Coefficienten zu $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ sind aber gleich Null, (750. 751.) also ist die Summe der Perpendikel auch auf alle andere, durch den Punkt der mittlern Entfernung gehende Axen, gleich Null. Und zwar kommt diese Eigenschaft nur allein den graden Linien zu, die durch den Punkt der mittlern Entfernung gehen, weil jede andere grade Linie, mit irgend einer der erstern parallel sein müßte, dann aber nie die Summe der Perpendikel auf die Parallelen gleich Null sein könnte, vielmehr um die $n$fache Entfernung der beiden Parallelen von einander auf der einen Seite größer sein würde, als auf der andern. Mithin schneiden sich alle Axen der mittlern Entfernung in einem und demselben Punkt.

381.

Eine ganz gleiche Eigenschaft findet für beliebige Punkte im Raume Statt. Alle Ebenen der mittlern Entfernuug schneiden sich in einem und demselben Punkte. Dieser Satz läßt sich unmittelbar aus dem vorigen Satze für Punkte in der Ebene beweisen. Man lege nämlich willkührlich drei Ebenen auf einander senkrecht, so ist ihr Durchschnitts-Punkt der Punkt der mittlern Entfernung für beliebige Punkte im Raume, wenn jede der algebraischen Summen der Entfernungen dieser Punkte von den drei Ebenen, Null ist.

Nun behalte man zuerst die eine der drei Ebenen, z. B. die der xy unverändert bei, lege aber senkrecht auf dieselbe zwei andere, unter sich senkrechte Ebenen der xz und yz, so bleiben auch für diese beiden neuen Ebenen, die Summen der

Entfernungen der gegebenen Punkte im Raume von ihnen Null. Denn diese Entfernungen sind diejenigen der Projectionen der Punkte auf die Ebene der xy, von den Durchschnitten der Ebenen der xz und yz mit der Ebene der xy. Daß aber die Summe dieser Entfernungen von zwei auf einander senkrechten Axen in der Ebene die nämliche bleibt, wie auch die Axen liegen mögen, wenn sie nur durch den Punkt der mittlern Entfernung gehen, was hier der Fall ist, folgt aus dem vorigen Paragraph. Die dritte Ebene aber ist unverändert geblieben, also ist, nach wie vor, für alle drei Ebenen die Summe der Perpendikel aus den Punkten im Raum auf sie, Null.

Man behalte ferner eine andere der drei Ebenen bei, z. B. die der xz, und verändere die der xy und yz, so läßt sich das Nämliche zeigen wie vorhin. Eben so mit der dritten Ebene.

Es ist aber leicht zu sehen, daß man durch diese Art der Veränderung der Ebenen, alle Ebenen, in allen nur möglichen Lagen, die durch den Punkt der mittlern Entfernung gehen, erhalten kann; also folgt, daß die Summe der Perpendikel aus den gegebenen Punkten im Raum, auf jede nur mögliche drei, auf einander senkrechte Ebenen, sobald solche durch den Punkt der mittlern Entfernung gehen, Null ist, und daß sich folglich alle nur mögliche Ebenen mittler Entfernung in dem Punkt mittler Entfernung schneiden.

382.

Ferner ist der Punkt der mittlern Entfernung für die Eckpunkte eines regelmäßigen Vielecks in der Ebene allemal der Mittelpunkt des, um das Vieleck beschriebenen Kreises.

Fig. 36. Wenn das Vieleck eine grade Zahl von Seiten hat, so ist der Satz ohne Weiteres klar, denn der bloße Anblick der Figur zeigt, daß für zwei auf einander senkrechte Axen, deren eine KL durch zwei Ecken der Figur geht, die Summe der Perpendikel aus den Ecken auf diese Axen, zu beiden Seiten derselben, gleich groß ist.

Fig. 37. Hat das Vieleck eine ungrade Zahl von Seiten, so lege man eine Axe KL durch eine Ecke der Figur und durch den Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, welche Axe

also die gegenüber liegende Seite des Vielecks halbirt, die andere Axe aber durch des Kreises Mittelpunkt, auf die erste senkrecht. Nun beschreibe man um das Vieleck ein anderes von der doppelten Seitenzahl, und zwar so, daß die Ecken des gegebenen Vielecks mitten in die Seiten des neuen Vielecks fallen. Dieses neue Vieleck hat jetzt eine grade Zahl von Seiten und gehört folglich für den obigen ersten Fall, das heißt: für das neue Vieleck ist der Mittelpunkt des Kreises wirklich der Punkt der mittlern Entfernung der Ecken. Aber die Perpendikel aus den Ecken des gegebenen Vielecks auf die Axen, sind allemal halb so lang, als die Summe der Perpendikel aus den Ecken des neuen Vielecks, zwischen welchen jene liegen, z. B. PP' ist gleich $\frac{1}{2}(DD' + EE')$ und $PP' = \frac{1}{2}(DD'' + EE'')$ wie sich leicht geometrisch zeigen läßt. Also beträgt die algebraische Summe der Perpendikel des gegebenen Vielecks die Hälfte derjenigen des neuen Vielecks. Da nun letztere Null ist, so ist es auch erstere. Folglich ist des Kreises Mittelpunkt auch für das gegebene Vieleck von einer ungraden Zahl Seiten der Punkt der mittlern Entfernung.

Mithin ist allemal, für jedes beliebige regelmäßige Vieleck, der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises der Punkt der mittlern Entfernung für die Ecken des Vielecks.

Man findet diesen Satz in den Abhandlungen, wenn ich nicht irre, der Leidener Academie abgehandelt, wo ein weitläuftiger Beweis davon gegeben ist. Der obige Beweis ist einfacher.

383.

Es wäre interessant, einen analogen Satz für die Kugelfläche zu haben. Für die 5 regulären Körper in der Kugel wird wahrscheinlich leicht zu beweisen sein, daß der Mittelpunkt der umschriebenen Kugel der Punkt der mittlern Entfernung der Ecken ist.

384.

Noch erwähne ich vom Punkt der mittlern Entfernung die Eigenschaft, daß die Summe der Quadrate seiner Entfernun-

gen von den Punkten, auf welche er sich bezieht, allemal ein Kleinstes ist.

Man suche nämlich für beliebige gegebene Punkte denjenigen, von dessen Entfernungen von den gegebenen Punkten, die Summe der Quadrate so klein als möglich ist, nehme dazu zwei beliebige, auf einander senkrechte Axen an, nenne die Coordinaten des gesuchten Punktes p und q und die Coordinaten der gegebnen Punkte a, α; b, β; $c, \gamma \ldots$ so sind die Quadrate der Entfernungen der letztern von dem ersten, wie leicht zu sehen,

$$(x-a)^2+(y-\alpha)^2,\ (x-b)^2+(y-\beta)^2,\ (x-c)^2+(y-\gamma)^2 \ldots$$

also soll

$$753.\quad (x-a)^2+(y-\alpha)^2+(x-b)^2+(y-\beta)^2+(x-c)^2 + (y-\gamma)^2 \ldots = \text{Min.}$$

sein. Dieses giebt, wenn man die Ableitungen nach x und y nimmt, und jede besonders, wie es für das Minimum der Fall ist, gleich Null setzt,

$$x-a+x-b+x-c\ldots = 0 \text{ und}$$
$$y-\alpha+y-\beta+y-\gamma\ldots = 0.$$

Hieraus folgt, wenn n Punkte vorhanden sind,

$$754.\quad x = \frac{a+b+c\ldots}{n} \text{ und } y = \frac{\alpha+\beta+\gamma\ldots}{n}$$

welches die Coordinaten des gesuchten Punktes sind. Diese Coordinaten sind aber keine anderen als diejenigen des Punktes der mittlern Entfernung. Denn man lege die willkührlichen Axen durch den gesuchten Punkt selbst, so ist $x = 0$ und $y = 0$, also

$$755.\quad a+b+c\ldots = 0 \text{ und } \alpha+\beta+\gamma\ldots = 0,$$

welches die Eigenschaft des Punkts der mittlern Entfernung ist, indem für denselben die Summe der Abcissen und Ordinaten der gegebenen Punkte Null ist. Also hat der Punkt der mittlern Entfernung die Eigenschaft, daß die Summe der Quadrate seiner Entfernungen von den Punkten, auf welche er sich bezieht, ein Kleinstes ist, und zwar ein Kleinstes;

denn nimmt man oben von (753.) die zweite Ableitung, so erhält man die Größen $1 + 1 + 1 \ldots = n$, und $1 + 1 + 1 \ldots = n$, welche allemal positiv sind.

385.

Es ist leicht zu sehen, daß ein ganz ähnlicher Satz für beliebige Punkte im Raume Statt findet. Denn wenn die Coordinaten der gegebenen Punkte im Raume jetzt a, α, A; b, β, B; ... diejenigen des gesuchten Punktes, von dessen Entfernungen von den ersten, die Quadrate zusammen ein Kleinstes sein sollen, x, y und z sind, so muß jetzt sein

$$756.\quad (x-a)^2 + (y-\alpha)^2 + (z-A)^2 + (x-b)^2 + (y-\beta)^2 + (z-B)^2 \ldots = \text{Min.}$$

Dieses giebt, wenn man die Ableitungen nach x, y und z einzeln gleich Null setzt,

$$757.\quad \begin{cases} x - a + x - b + x - c \ldots = 0 \\ y - \alpha + y - \beta + y - \gamma \ldots = 0 \\ z - A + z - B + z - C \ldots = 0, \end{cases}$$

woraus folgt

$$758.\quad \begin{cases} x = \dfrac{a + b + c \ldots}{n} \\ y = \dfrac{\alpha + \beta + \gamma \ldots}{n}, \\ z = \dfrac{A + B + C \ldots}{n} \end{cases}$$

oder, wenn man die willkührlichen Coordinaten-Ebenen durch den Punkt x, y, z selbst legt, so daß also x, y und z Null sind,

$$759.\quad \begin{cases} a + b + c \ldots = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma \ldots = 0 \\ A + B + C \ldots = 0, \end{cases}$$

welches anzeigt, daß der gesuchte Punkt kein anderer als der Punkt der mittlern Entfernung ist, der also auch für beliebige Punkte im Raume die Eigenschaft hat, daß die Summe der

Quadrate seiner Entfernungen von den gegebenen Punkten ein Kleinstes ist.

Von andern merkwürdigen Eigenschaften des Punkts der mittlern Entfernung kann man die oben erwähnten Abhandlungen nachlesen.

386.

Die Eigenschaft des Punktes mittler Entfernung, daß die Summe der Quadrate seiner Entfernungen, von den Punkten auf welche er sich bezieht, ein Kleinstes ist, führt zunächst zu einer Vergleichung desselben mit dem Punkte der kleinsten Entfernung; denn bei diesen letztern findet ebenfalls ein auf die Entfernungen sich beziehendes Kleinstes Statt, nur ist es hier nicht die Summe der Quadrate der Entfernungen, sondern die Summe der Entfernungen selbst.

387.

Man setze, von beliebigen Punkten in der Ebene, die Coordinaten für zwei willkührliche, auf einander senkrechte Axen, wie vorhin, $a, b, c \ldots$ und $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ die Coordinaten des gesuchten Punkts, dessen Entfernungen von den gegebenen Punkten, zusammen so klein sein sollen als möglich, x und y, so muß jetzt sein

$$760.\quad \sqrt{((x-a)^2+(y-\alpha)^2)}+\sqrt{((x-b)^2+(y-\beta)^2)} + \sqrt{(x-c)^2+(y-\gamma)^2)} \ldots = \text{Min.}$$

Daraus folgt, wenn man die ersten Ableitungen nach x und y, einzeln gleich Null setzt:

$$761.\quad \frac{x-a}{\sqrt{((x-a)^2+(y-\alpha)^2)}}+\frac{x-b}{\sqrt{((x-b)^2+(y-\beta)^2)}} + \frac{x-c}{\sqrt{((x-c)^2+(y-\gamma)^2)}} \ldots = 0$$

$$762.\quad \frac{y-\alpha}{\sqrt{((x-a)^2+(y-\alpha)^2)}}+\frac{y-\beta}{\sqrt{((x-b)^2+(y-\beta)^2)}} + \frac{y-\gamma}{\sqrt{((x-c)^2+y-\gamma)^2))}} \ldots = 0$$

Fig. 38. Es ist leicht zu sehen, daß die Reihe (761.) die Summe

Summe der Cosinus und die Reihe (762.) die Summe der Sinus der Winkel ausdrückt, welche die aus dem gesuchten Punkt x, y nach den gegebenen Punkten a, α; b, β; c, γ... gezogene Linien mit der Axe der x machen; denn wenn z. B. P der Anfangs-Punkt der Coordinaten, A einer der gegebenen Punkte, z. B. a, α; M der gesuchte Punkt x, y ist, so ist $x - A = A'M' = AM''$ und $\sqrt{((x-a)^2 + (y-\alpha)^2)} = AM$; also ist $\frac{x-a}{\sqrt{((x-a)^2+(y-\alpha)^2)}} = \cos MAM''$. Eben so ist $\frac{y-\alpha}{\sqrt{((x-a)^2+(y-\alpha)^2)}} = \sin MAM''$ und so für alle andere Punkte.

Wenn also die Winkel, welche die aus dem gesuchten Punkt nach den gegebenen Punkten gezogene grade Linien mit der Axe der x machen, α', β', γ'... heißen, so ist für den Punkt der kleinsten Entfernung

$$763. \begin{cases} \sin \alpha' + \sin \beta' + \sin \gamma' \ldots = 0 \quad \text{und} \\ \cos \alpha' + \cos \beta' + \cos \gamma' \ldots = 0 \end{cases}$$

oder auch, wenn die Winkel mit der Axe der y, α'', β'', γ''... heißen

$$764. \begin{cases} \cos \alpha' + \cos \beta' + \cos \gamma' \ldots = 0 \\ \cos \alpha'' + \cos \beta'' + \cos \gamma'' \ldots = 0. \end{cases}$$

388.

Für Punkte im Raume ist die Summe der Entfernungen des gesuchten Punkts kleinster Entfernung von den gegebenen Punkten, wenn die Coordinaten durch a, α, A; b, β, B... und x, y, z bezeichnet werden

$$765. \begin{cases} \sqrt{((x-a)^2 + (y-\alpha)^2 + (z-A)^2)} \\ + \sqrt{((x-b)^2 + (y-\beta)^2 + (z-B)^2)} \\ + \sqrt{((x-c)^2 + (y-\beta)^2 + (z-C)^2)} \\ \text{— — — — — —} \end{cases}$$

die ein Minimum sein soll.

Nimmt man davon die ersten Ableitungen nach x, y und z und setzt sie einzeln gleich Null, so erhält man drei Reihen, deren Glieder die Form

$$766. \begin{cases} \frac{x - a}{\sqrt{((x-a)^2 + (y-\alpha)^2 + (z-A)^2)}} \\ \frac{y - \alpha}{\sqrt{((x-a)^2 + (y-\alpha)^2 + (z-A)^2)}} \\ \frac{z - A}{\sqrt{((x-a)^2 + (y-\alpha)^2 + (z-A)^2)}} \end{cases}$$

haben.

Diese Größen drücken, wie leicht zu sehen, die Cosinus der Winkel aus, welche die Linien aus dem gesuchten Punkte nach den gegebenen, mit den Axen der x, y und z machen. Werden also diese Winkel durch α', α'', α'''; β', β'', β'''; γ', γ'', γ'''... bezeichnet, so ist für den, auf beliebige Punkte im Raum sich beziehenden Punkt kleinster Entfernung:

$$767. \begin{cases} \cos\alpha' + \cos\beta' + \cos\gamma' \ldots = 0 \\ \cos\alpha'' + \cos\beta'' + \cos\gamma'' \ldots = 0 \\ \cos\alpha''' + \cos\beta''' + \cos\gamma''' \ldots = 0. \end{cases}$$

389.

Hieraus folgt nachstehender merkwürdige ganz allgemeine Satz. Man stelle sich um den Punkt kleinster Entfernung eines gegebenen Systems von Punkten, wenn dieselben in einer Ebene liegen, einen Kreis, wenn sie nicht in einer Ebene liegen, eine Kugelfläche mit dem Halbmesser 1 beschrieben vor, so sind die Entfernungen zwischen denjenigen Punkten, in welchen grade Linien, aus dem Punkt kleinster Entfernung nach den gegebenen Punkten gezogen, den Kreis und die Kugelfläche schneiden, und zwischen den Axen, nichts anders als die Cosinus der Winkel selbst, welche die Linien aus dem Punkt der kleinsten Entfernung, nach den gegebenen Punkten gezogen, mit den Axen machen. Derjenige Punkt ist also der Punkt kleinster Entfernung, für welchen die Summe dieser Cosinus Null ist.

390.

Fig. 39. Für ein System von Punkten in der Ebene sind die Cosinus die Entfernungen der Durchschnitts-Punkte

des Kreises von den Axen. Denn z. B. für den Durchschnitts-Punkt A′ ist der Cosinus des Winkels A′ MA″ nichts anders, als die Entfernung A′ A‴ des Punkts A′ von der andern Axe NO. Also ist für jedes System von Punkten A, B, C, D, E, F in der Ebene, der Punkt kleinster Entfernung allemal zugleich der Punkt mittler Entfernung derjenigen Punkte A′ B′ C′ D′ E′ F′ in welchen grade Linien MA, MB..., aus ihm nach den gegebenen Punkten gezogen, einen willkührlich um ihn gezogenen Kreis schneiden.

391.

Für Punkte im Raume findet diese letztere Eigenschaft nicht Statt, denn die Entfernungen der Durchschnitts-Punkte der Kugelfläche und der Centrallinien von den Axen, deren Summe nach (§. 388. u. 389.) für den Punkt kleinster Entfernung Null sein muß, sind nicht den Entfernungen jener Durchschnitts-Punkte der Kugelfläche von den Coordinaten-Ebenen gleich, und nur die Summe der letztern, nicht jener Entfernungen, ist für den Punkt mittler Entfernung gleich Null (§. 387.)

392.

Von den Ecken regelmäßiger Vielecke ist der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises allemal der Punkt mittler Entfernung (§. 382.) und die graden Linien aus dem Mittelpunkt des Kreises nach den Ecken des regelmäßigen Vielecks, machen mit einander gleiche Winkel.

Fig. 39. Ist also in einem gegebenen Vieleck ABCDEF ein Punkt M möglich, aus welchem, Linien nach den Ecken gezogen, gleiche Winkel AMB, BMC... mit einander machen, so ist dieser Punkt M der Punkt der kleinsten Entfernung für die Ecken A, B, C, D, E, F; denn er ist der Punkt mittler Entfernung der, in den Ecken eines regelmäßigen Vielecks liegenden Durchschnitts-Punkte des Kreises A′ B′ C′ D′ E′ F′, mit den Linien AM, BM ꝛc.

393.

Nicht für alle Vielecke, sondern nur allein für das Dreieck

ist allemal ein Punkt M möglich, aus welchem Linien nach den Ecken des Dreiecks gezogen, unter sich gleiche Winkel machen, und zwar nur so lange, als der Punkt innerhalb des Dreiecks fällt, das heißt so lange kein Winkel des Dreiecks größer als $\frac{1}{3}(4\varrho)$ ist. Man beschreibe nämlich über einer der Dreiecks-Seiten, z. B. BC Fig. 40. einen Kreisbogen BM′MC, der den Winkel $\frac{4}{3}\varrho$ fasset, welches geschehen kann, indem man zwei gleichseitige Dreiecke BME und CME errichtet, deren gemeinschaftliche Grundlinie ME die Seite BC halbirt und von ihr halbirt wird, so sind alle Winkel BM′C, BMC in diesem Kreisbogen gleich $\frac{4}{3}\varrho$. Der Winkel AM′C aber aus der dritten Ecke, kann, so wie der Punkt M′, in den Kreisbogen fortrückend, jede Größe zwischen ABC und 2ϱ erhalten, denn wenn dieser Punkt in B fällt, so ist der Winkel AM′C = ABC und wenn der Punkt M′ in C fällt, so ist der Winkel AM′C = 2ϱ. Da nun nach der Voraussetzung jeder Winkel des Dreiecks, also auch ABC, $< 2\varrho$ ist, so kann der Winkel AM′C in irgend einer Lage des Punkts M′, z. B. wenn sich derselbe in M befindet, gleich $\frac{4}{3}\varrho$ sein. Da aber im Fall BMC $= \frac{4}{3}\varrho$ und AMC $= \frac{4}{3}\varrho$, der dritte Winkel AMB von selbst $= \frac{4}{3}\varrho$ ist, so ist allemal ein Punkt M möglich, aus welchem Linien nach den Ecken gezogen, unter sich gleiche Winkel machen.

Fig. 41. Daraus folgt, daß der Punkt kleinster Entfernung für die Ecken eines Dreiecks der eben benannte ist; denn zieht man um denselben einen Kreis, so liegen die Durchschnitts-Punkte A′ B′ C′ dieses Kreises mit den Linien MA, MB, MC, in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Punkt mittler Entfernung der Mittelpunkt des Kreises ist. (§. 382.)

Man findet diesen Fall für das Dreieck an der oben angezeigten Stelle der Berliner Memoiren durch Rechnung abgehandelt. Er ist hier in dem obigen allgemeinen Satze enthalten.

394.

Daß schon für das Viereck und noch mehr für Figuren von mehreren Seiten nicht immer ein Punkt möglich ist, aus

welchem Linien nach den Ecken gezogen, unter sich gleiche Winkel machen, ist leicht zu sehen. Denn im Viereck z. B. müßten die gleichen Winkel um den verlangten Punkt rechte sein, also wären die Linien AMC und BMD Fig. 42. grade Linien, und folglich Diagonalen des Vierecks, welche aber bekanntlich nicht immer unter rechten Winkeln einander schneiden.

Noch weniger findet ein Scheitelpunkt gleicher Winkel für Figuren von mehreren Seiten Statt.

395.

Also nur für das Dreieck allein liegen um den Punkt kleinster Entfernung gleiche Winkel zwischen den Linien nach den Ecken der Figur. Für alle Figuren von mehreren Seiten, so wie für Punkte im Raume, liegen bloß die Punkte, in welchen die Centrallinien einen Kreis oder eine Kugelfläche um den Punkt kleinster Entfernung schneiden, so, daß die algebraische Summe ihrer Entfernungen von den Axen oder Coordinaten-Ebenen Null ist, welches auf unendlich verschiedene Weise möglich ist, ohne daß die Durchnitts-Punkte grade in den Ecken eines regelmäßigen Vielecks oder Körpers liegen dürfen.

396.

Fig. 43. Für das Viereck z. B. wird die Bedingung erfüllt, wenn je zwei und zwei Centrallinien grade Linien bilden. Denn es ist klar, daß, wenn zwei grade Linien AC und BD durch den Mittelpunkt eines Kreises gehen, die algebraische Summe der Entfernungen der Punkte A, B, C, D, in welchem sie den Kreis schneiden von zwei auf einander senkrechten Axen KL und MN, allemal Null ist, welche Winkel auch die Linien unter sich und mit den Axen machen mögen; woraus folgt, daß für das Viereck der Durchschnitts-Punkt der beiden Diagonalen des Vierecks der Punkt kleinster Entfernung der Ecken ist; denn von den Diagonalen wurde die Bedingung für die Lage dieses Punkts erfüllt.

397.

Die beiden Gleichungen (761. u. 762.) für Punkte in der

Ebene, und die drei Gleichungen mit Gliedern von der Form (766.) für Punkte im Raume, sind diejenigen, welche zur Bestimmung der Coordinaten des Punkts kleinster Entfernung, aus den Coordinaten der gegebenen Punkte, dienen. Doch läßt sich die Bestimmung der Winkel um die Centrallinien leichter bewerkstelligen, wenn man trigonometrische Linien zur Hülfe nimmt.

398.

Aus dem allgemeinen Satze (§. 389.) folgt noch der merkwürdige Umstand, daß Punkte in der Ebene und im Raume, in den verschiedenartigsten Lagen, einerlei Punkt kleinster Entfernung haben können, das heißt, daß in den verschiedenartigsten Systemen von Punkten, die graden Linien aus dem Punkte kleinster Entfernung nach den gegebenen Punkten gezogen, mit einander die nämlichen Winkel machen können, z. B. in Figur 39. hat das Vieleck ABC″D″EF den nämlichen Punkt kleinster Entfernung, wie das Vieleck ABCDEF und alle mögliche Vielecke, deren Ecken nur in den Linien AM, BM, CM, DM, EM, FM liegen, haben alle den nämlichen Punkt kleinster Entfernung. Eben so für Punkte im Raume.

Die Figuren in der Ebene und im Raume, welche einen und denselben Punkt kleinster Entfernung haben, gehören wegen dieser gemeinschaftlichen Eigenschaft gleichsam in eine Classe, und es wäre interessant, die ihnen deshalb gemeinsam zukommenden Eigenschaften zu untersuchen.

399.

Eine Unterabtheilung dieser Classe von Figuren würden diejenigen bilden, um deren gemeinschaftlichen Punkt kleinster Entfernung, zwischen den Centrallinien gleiche Winkel liegen. Man sieht leicht, daß diese Art von Figuren schon gemeinschaftlich die Eigenschaft haben, daß sie durch ihre Seiten allein bestimmt werden, ohne die Winkel; etwa wie Figuren im Kreise, oder in der Kugel. Denn der Centrallinien sind so viel als Seiten, und die gleichen Winkel werden von selbst

bestimmt, weil ihre Größe gleich ist vier rechten, dividirt durch die Zahl der Seiten; also wird die Figur, weil sie durch die Centrallinien und die eingeschlossenen Winkel gänzlich gegeben ist, auch durch die Seiten allein bestimmt. Eben so verhält es sich mit Figuren im Raume. Die Winkel solcher Figuren, der Inhalt u. s. w. lassen sich also aus den Seiten finden.

400.

Die Untersuchung der Punkte kleinster und mittler Entfernung, welcher letztere der Schwerpunkt der Ecken einer Figur, und wenn alle Punkte auch im Innern der Figur betrachtet werden, der Schwerpunkt der Fläche der Figur ist, bilden einen interessanten Abschnitt einer weiter ausgeführten Geometrie. Ueberhaupt würde es interessant sein, die verschiedenen Central-Punkte der Figuren näher zu betrachten, wozu gehören: der Central-Punkt der Ecken einer Figur, oder der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, oder der umschriebenen Kugel, in sofern dergleichen möglich sind; der Central-Punkt der Seiten oder der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises oder der eingeschriebenen Kugel, in sofern solche möglich sind u. s. w. Die Punkte mittler und kleinster Entfernung sind ebenfalls Arten dieser Central-Punkte.

Gedruckt bei A. W. Schade, alte Grünstr. Nr. 18. in Berlin.

Von dem Verfasser dieses Werks sind noch folgende Bücher in unserm Verlage erschienen:

Archiv für die Baukunst und ihre Hülfswissenschaften. Unter Mitwirkung mehrerer Mitglieder der Königl. Preuß. Ober-Bau-Deputation, herausgegeben von Dr. A. L. Crelle. 1r Bd. Mit Kupf. gr. 4. 1818. 4 Thlr.

Ueber die Anwendung der Rechnung mit veränderlichen Größen auf Geometrie und Mechanik. Nebst einigen vorhergehenden Bemerkungen über die Prinzipien dieser Rechnung. Mit 1 Kupf. 8. 816. 8 Gr.

Ueber einige Eigenschaften des ebenen geradlinien Dreiecks, rücksichtlich dreier durch die Winkelspitzen gezogenen geraden Linien. Mit 2 Kupf. 8. 816. 12 Gr.

Ueber Parallelen-Theorien und das System in der Geometrie. Mit 4 Kupf. 8. 816. 16 Gr.

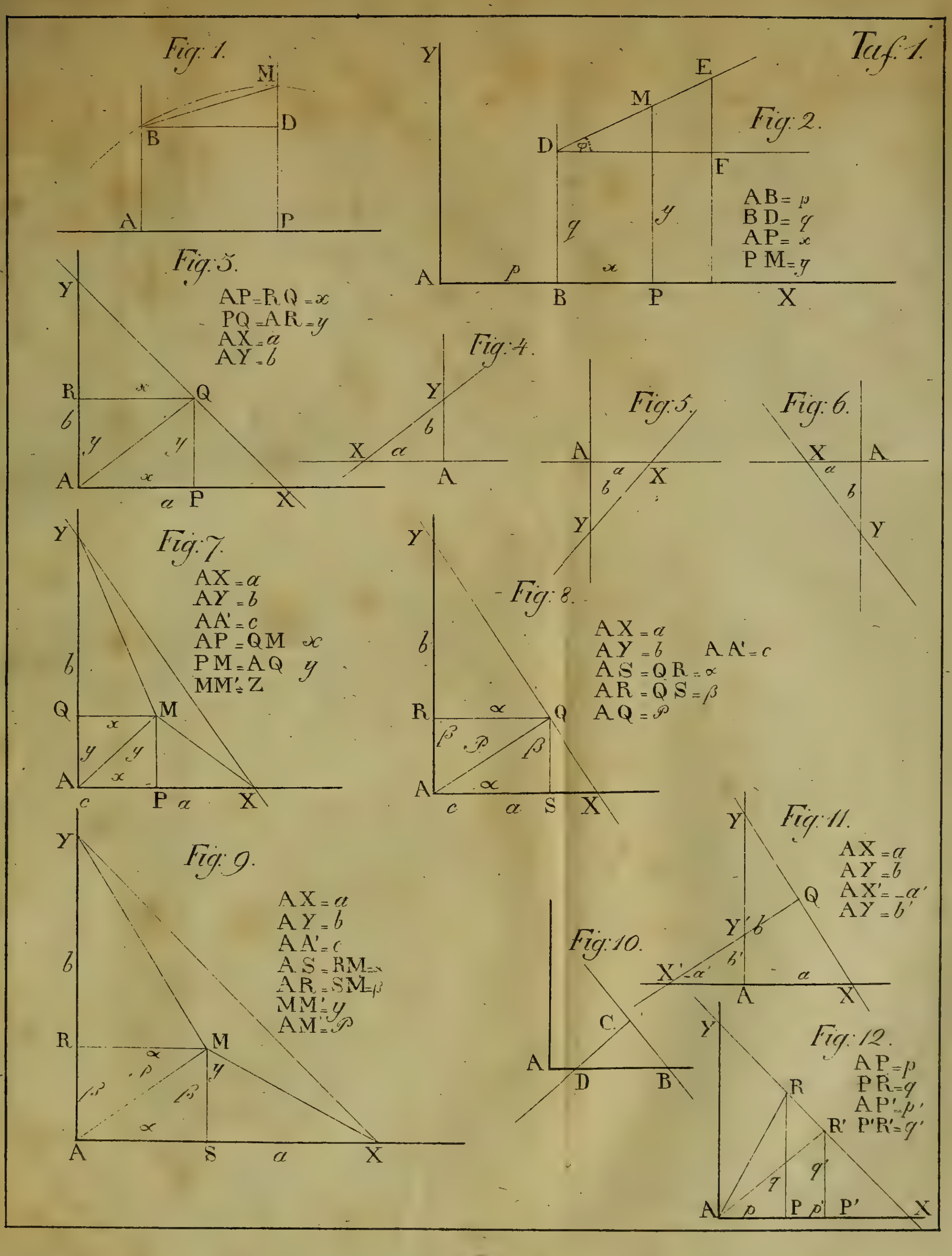
Vom Cathetometer, einem neuen Winkelmaaß-Instrumente, welches leichter zu verfertigen und wohlfeiler ist, die Winkel genauer misset, die Berechnung der Figuren erleichtert und weniger Irrthümer der Beobachtungen ausgesetzt ist, als andere bekannte Winkelmaaß-Instrumente. Mit 1 Kupf gr. 4. 817. 1 Thlr.

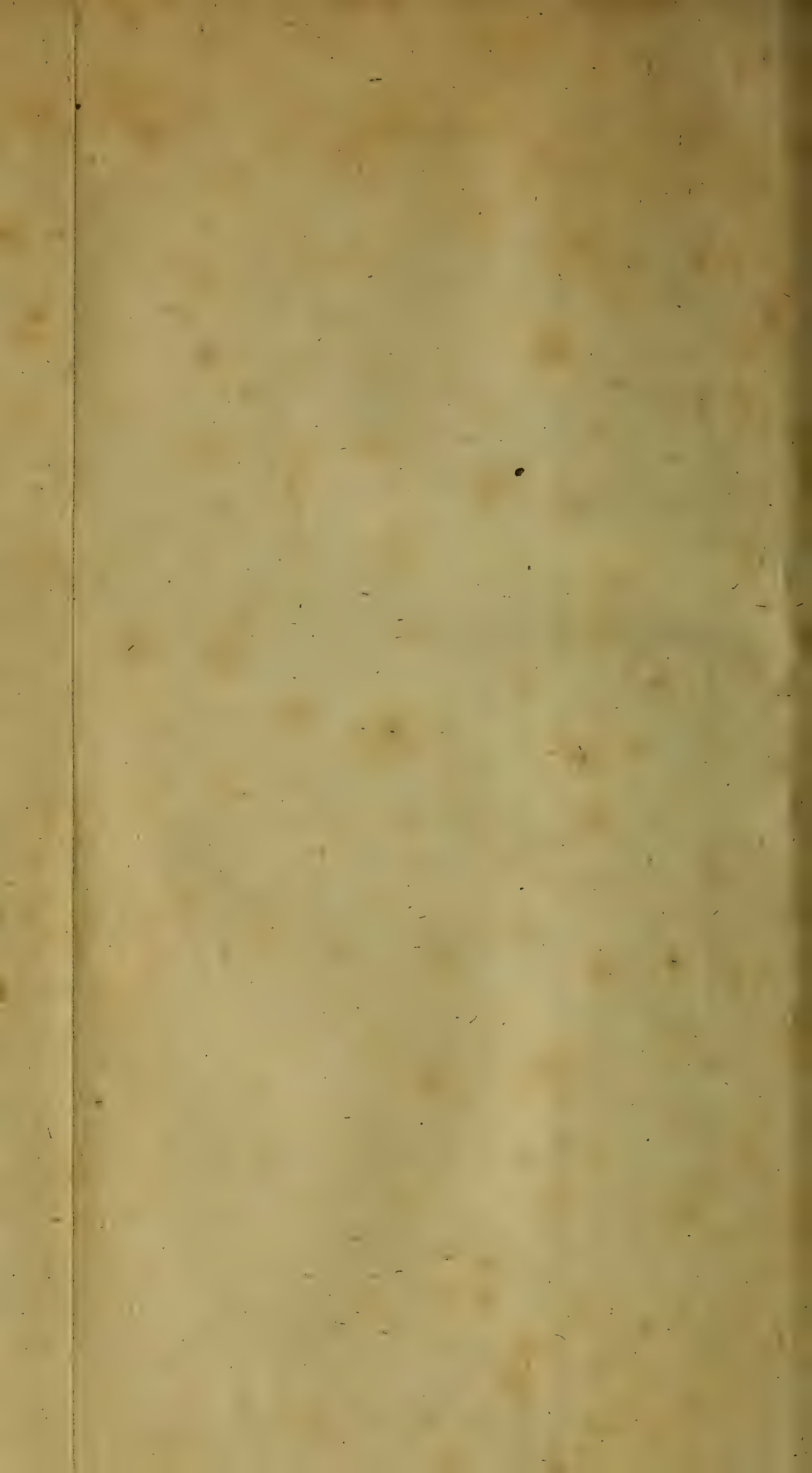
Rechentafeln, welche alles Multipliciren und Dividiren mit Zahlen unter Tausend ganz ersparen, bei grösseren Zahlen aber die Rechnung erleichtern und sicherer machen. 2 Bde. gr. 8. 820. 10 Thlr. 16 Gr.

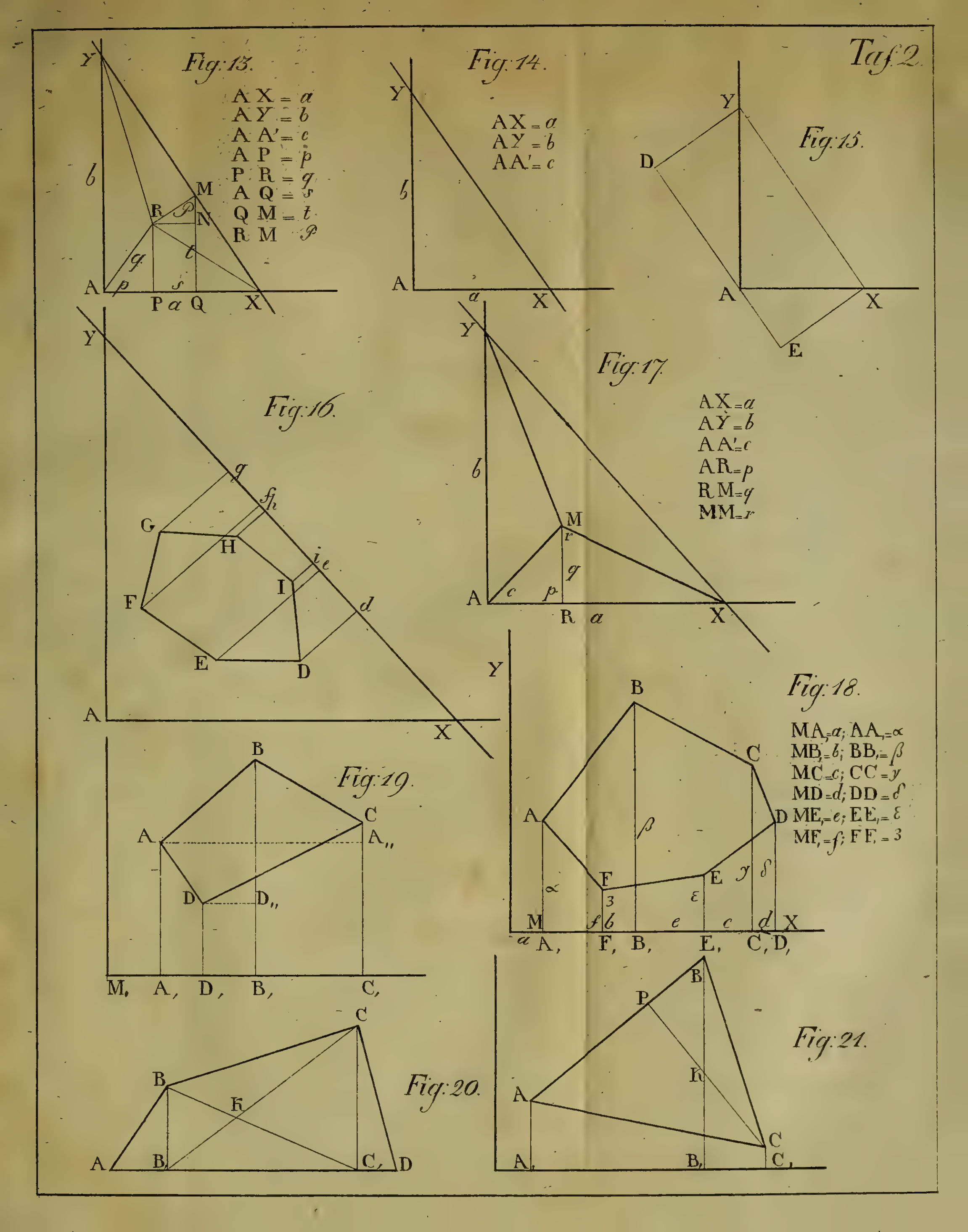
Dieselben, Text in französischer Sprache. 2 Bde. 10 Thlr. 16 Gr.

Sammlung mathematischer Aufsätze und Bemerkungen. 1r Bd. Mit 5 Kupfertafeln. 8. 821. 1 Thlr. 20 Gr.

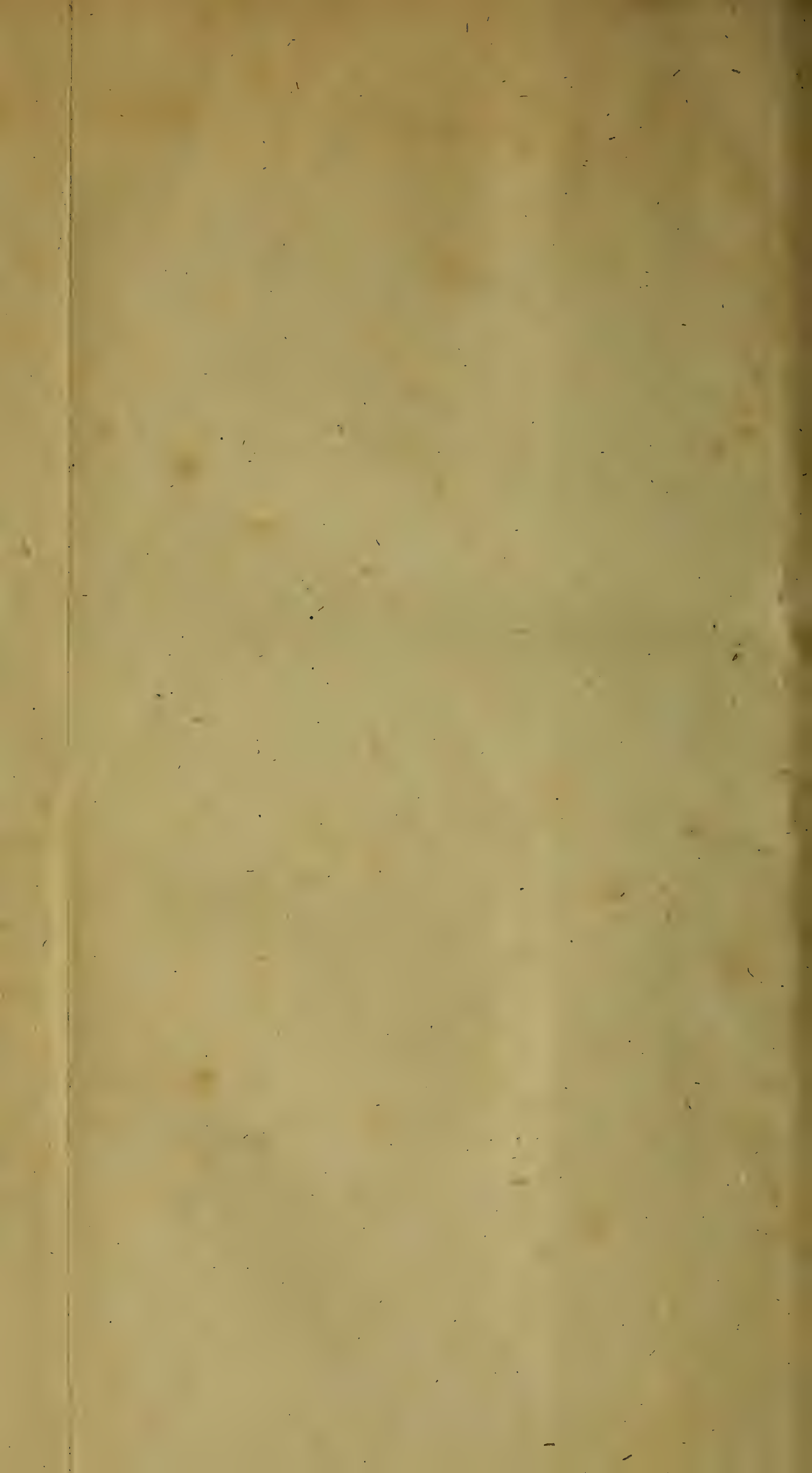
Hectors Abschied. 16 Gr.

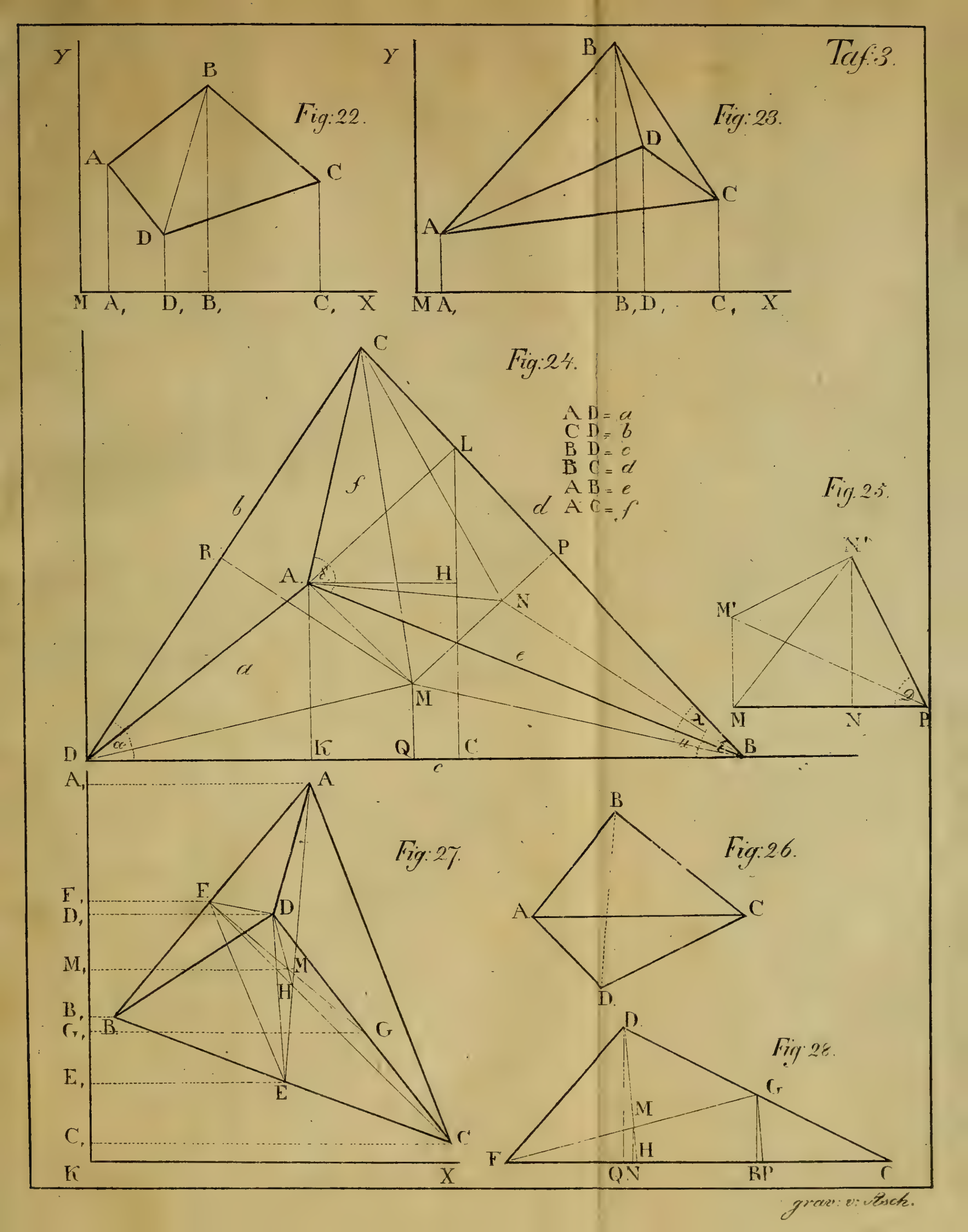

Taf. 1.
Fig. 1.
Fig. 2.
AB = p
BD = q
AP = x
PM = y
Fig. 3.
AP = RQ = x
PQ = AR = y
AX = a
AY = b
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
AX = a
AY = b
AA' = c
AP = QM x
PM = AQ y
MM' = Z
Fig. 8.
AX = a
AY = b
AA' = c
AS = QR = α
AR = QS = β
AQ = ℘
Fig. 9.
AX = a
AY = b
AA' = c
AS = RM = x
AR = SM = β
MM' = y
AM' = ℘
Fig. 10.
Fig. 11.
AX = a
AY = b
AX' = -a'
AY = b'
Fig. 12.
AP = p
PR = q
AP' = p'
P'R' = q'



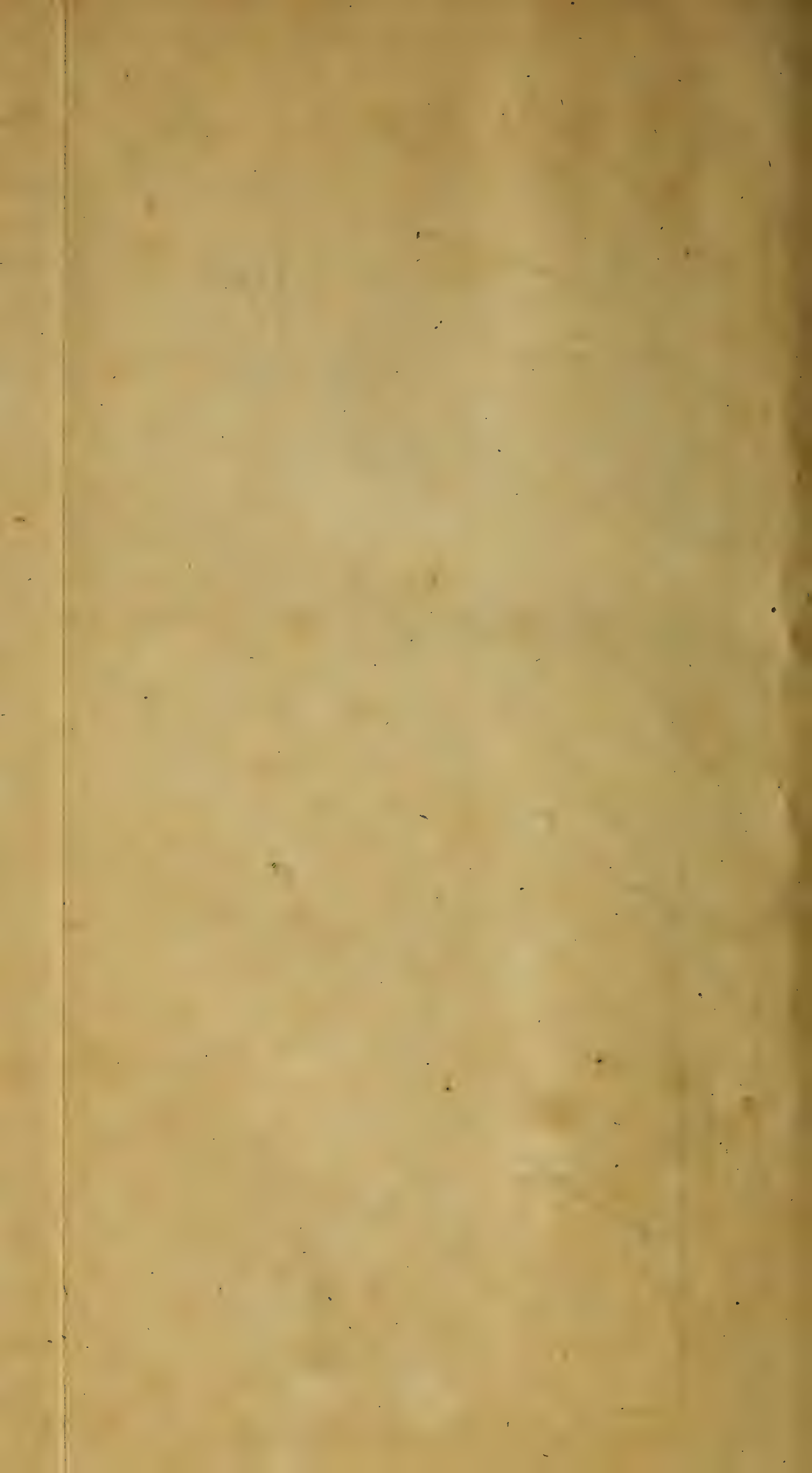


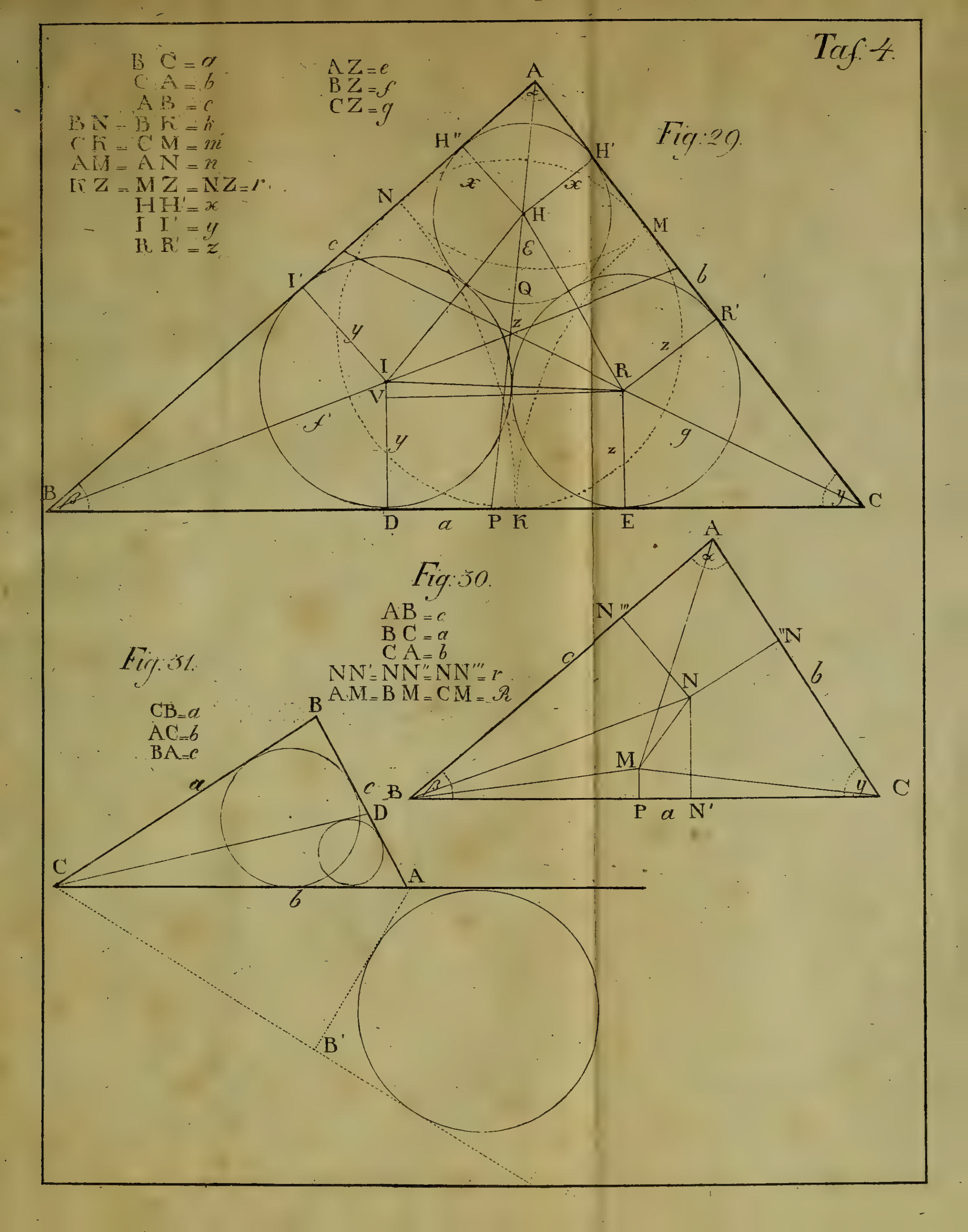
Taf. 2.
Fig. 13.
AX = a
AY = b
AA' = c
AP = p
PR = q
AQ = s
QM = t
RM = 𝒫
Fig. 14.
AX = a
AY = b
AA' = c
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
AX = a
AY = b
AA' = c
AR = p
RM = q
MM = r
Fig. 18.
MA, = a; AA, = α
MB, = b; BB, = β
MC = c; CC = γ
MD = d; DD = δ
ME, = e; EE, = ε
MF, = f; FF, = 3
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.



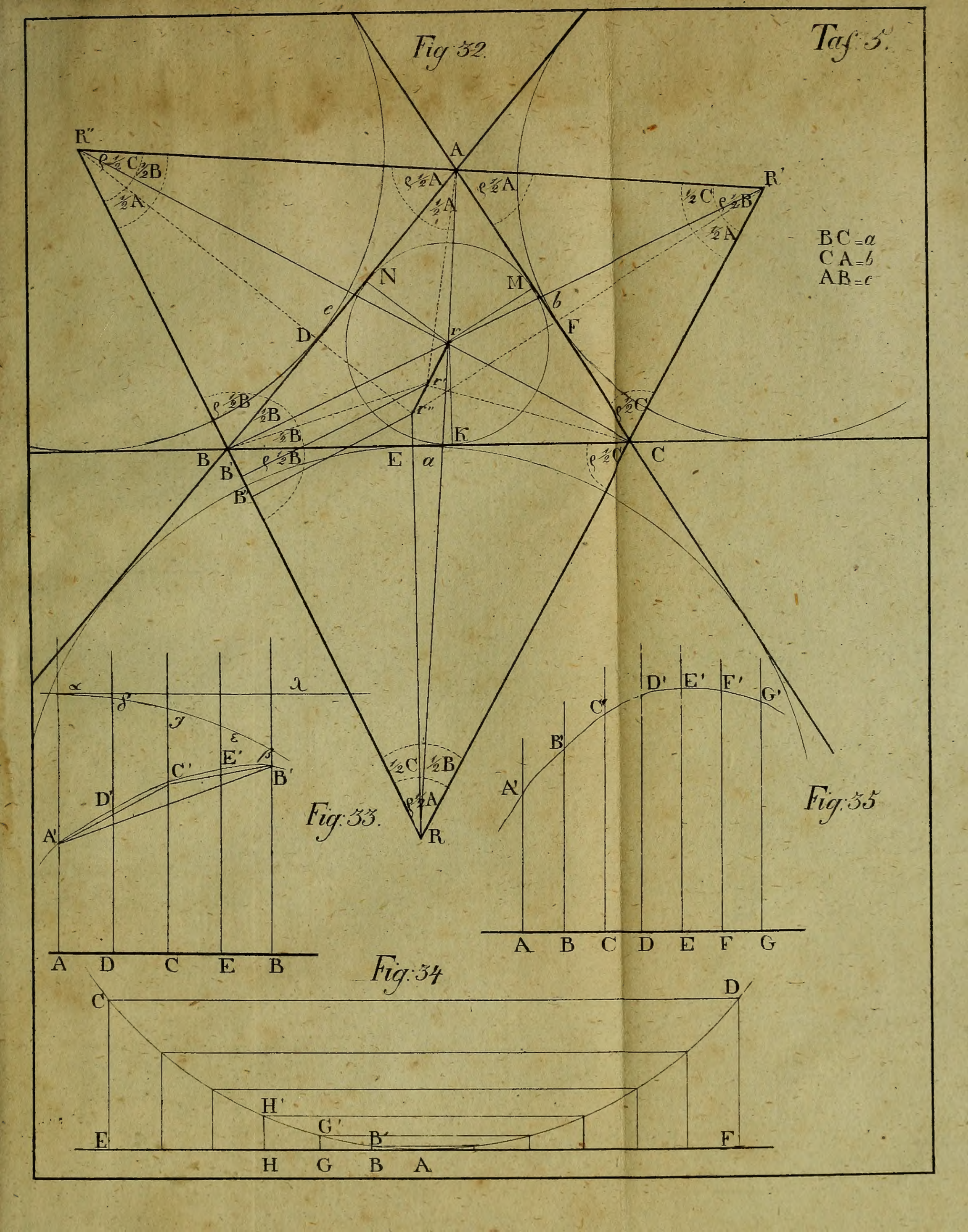


Taf. 3.
Fig: 22.
Fig: 23.
Fig: 24.
A D = a
C D = b
B D = c
B C = d
A B = e
A C = f
Fig. 25.
Fig: 27.
Fig: 26.
Fig. 28.
grav: v: Asch.




Taf. 4.
Fig: 29.
B C = a
C A = b
A B = c
B N = B K = k
C K = C M = m
A M = A N = n
K Z = M Z = N Z = r
H H' = x
I I' = y
R R' = z
A Z = e
B Z = f
C Z = g
Fig: 30.
AB = c
B C = a
C A = b
NN' = NN'' = NN''' = r
A M = B M = C M = R
Fig: 31.
CB = a
AC = b
BA = c




Taf. 5.
Fig. 32.
BC = a
CA = b
AB = c
Fig. 33.
Fig. 34
Fig. 35

